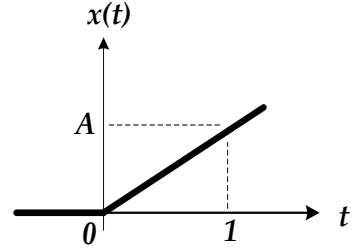
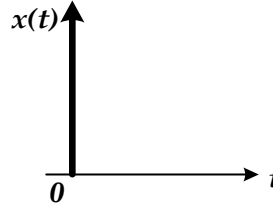
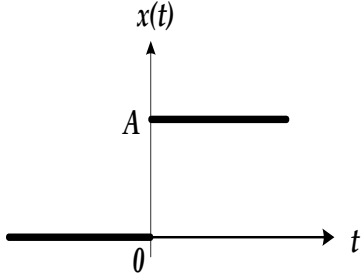


Sayısal Kontrol Sistemleri

Prof. Dr. Muammer GÖKBULUT

Hatırlatma: Analog (Sürekli Zaman) Sinyaller ve Sistemler

Analog (sürekli zaman) Temel Test Sinyalleri: Basamak, impuls, rampa



- Doğrusal ve zamanla değişmeyen analog sistemlerin matematiksel modelleri

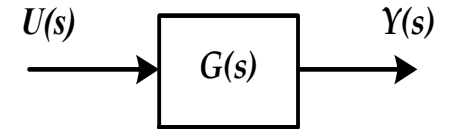
Diferansiyel denklem

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 4 \frac{du(t)}{dt} + 5u(t)$$



Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s + 5}{s^2 + 2s + 3}$$

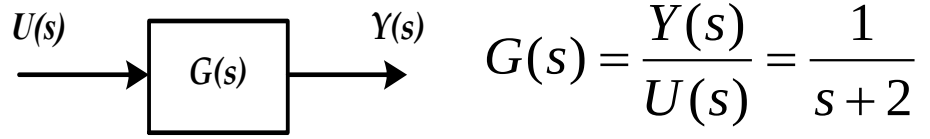


Durum denklemi

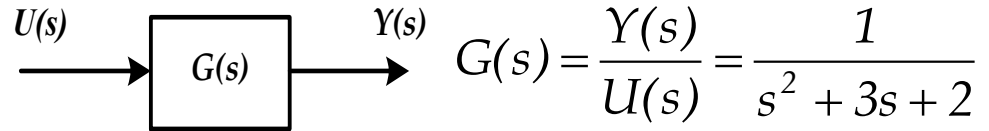
$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

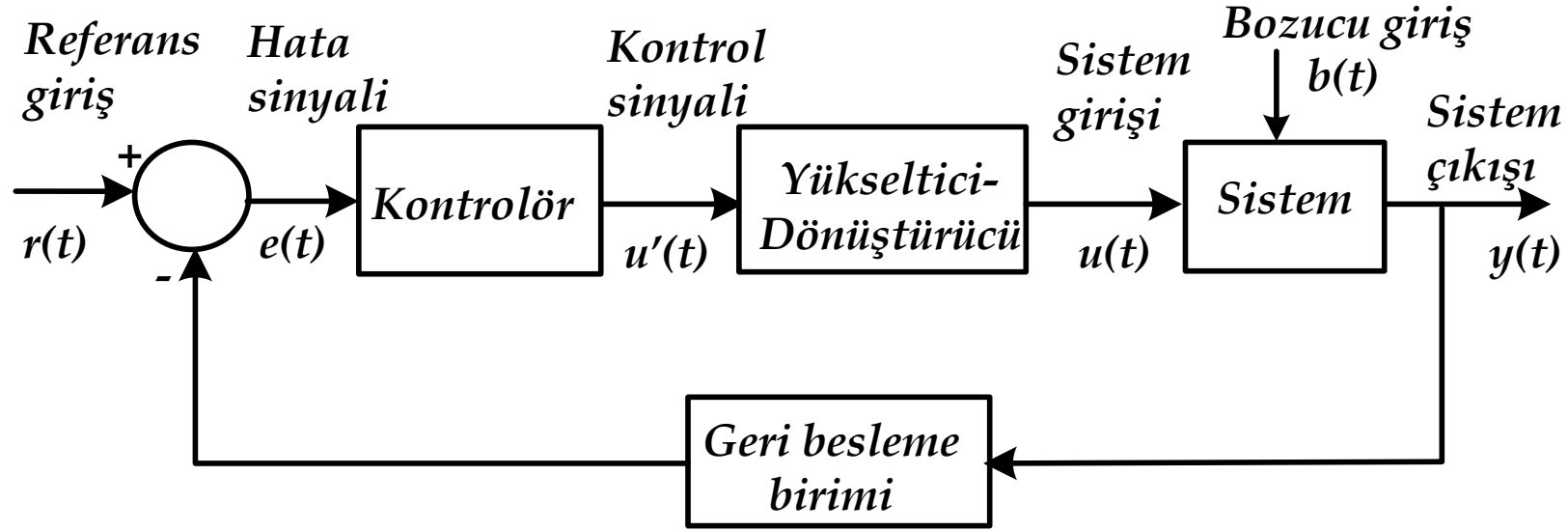
Örnek: Verilen sistemin birim rampa cevabını bulunuz.



Örnek: Verilen sistemin birim basamak cevabını bulunuz.



Kapalı Çevrim Kontrol Sistemi : Analog-Süreklî Zaman



Birimler:

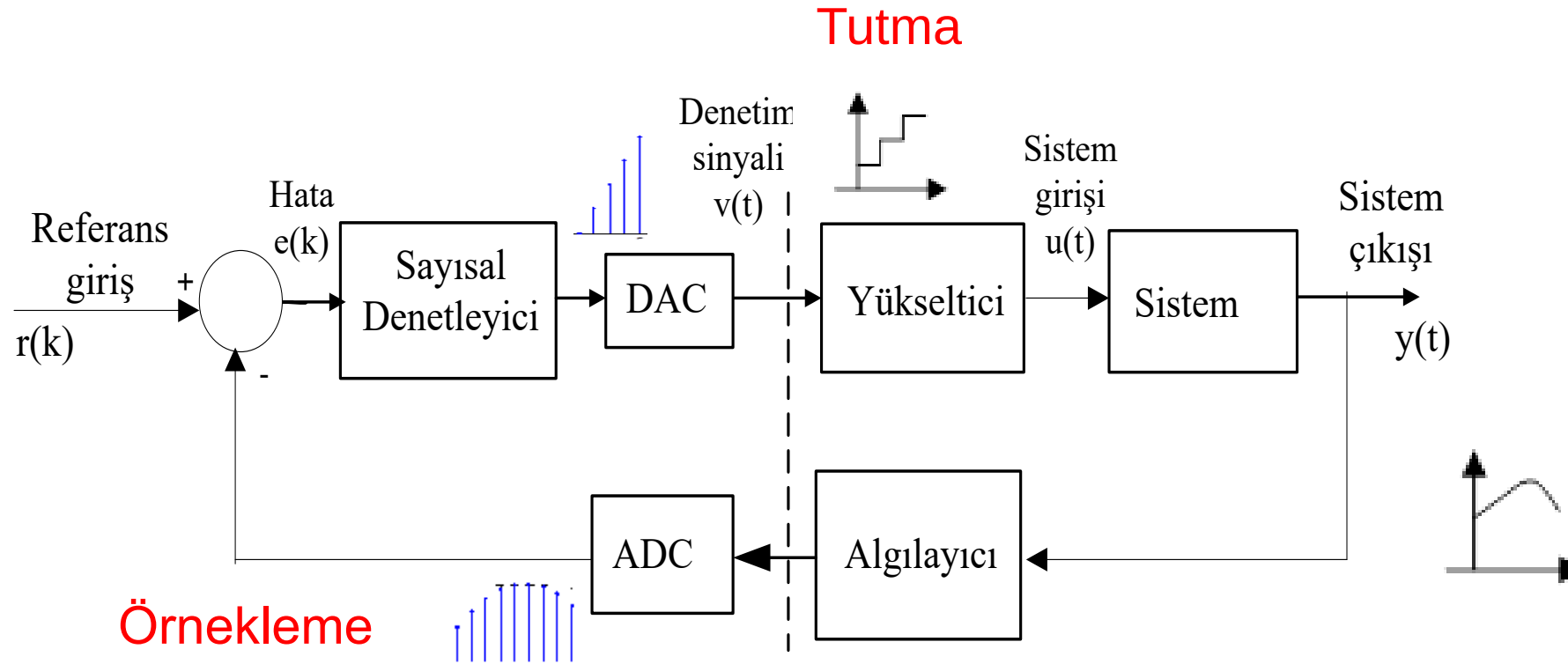
- Kontrolör,
- Kontrol edilen sistem,
- Geri besleme birimi ya da algılayıcı,
- Yükseltici/dönüştürücü birim

Sinyaller:

- Referans giriş
- Hata sinyali,
- Kontrol sinyali,
- Sistem girişi ve çıkışı

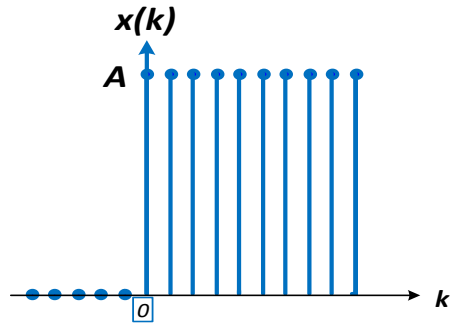
1.1 Kapalı Çevrim Sayısal Kontrol Sistemi

Sayısal kontrol sistemlerinde genellikle denetlenen sistem **analog (sürekli zaman)** bir sistem iken denetleyici **sayısal (ayrık zaman)** bir birimdir.



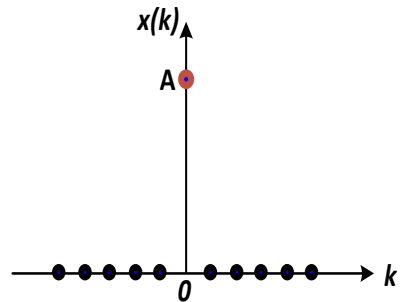
1.2 Ayırık Zaman Temel Test Sinyalleri: Basamak, impulse, rampa

Basamak / birim basamak sinyaller:

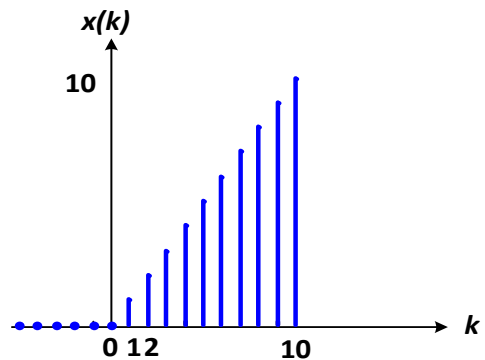


Örnek: Bilgisayar programlama dillerinde, MATLAB gibi, buradaki temel test sinyalleri nasıl tanımlanır.?

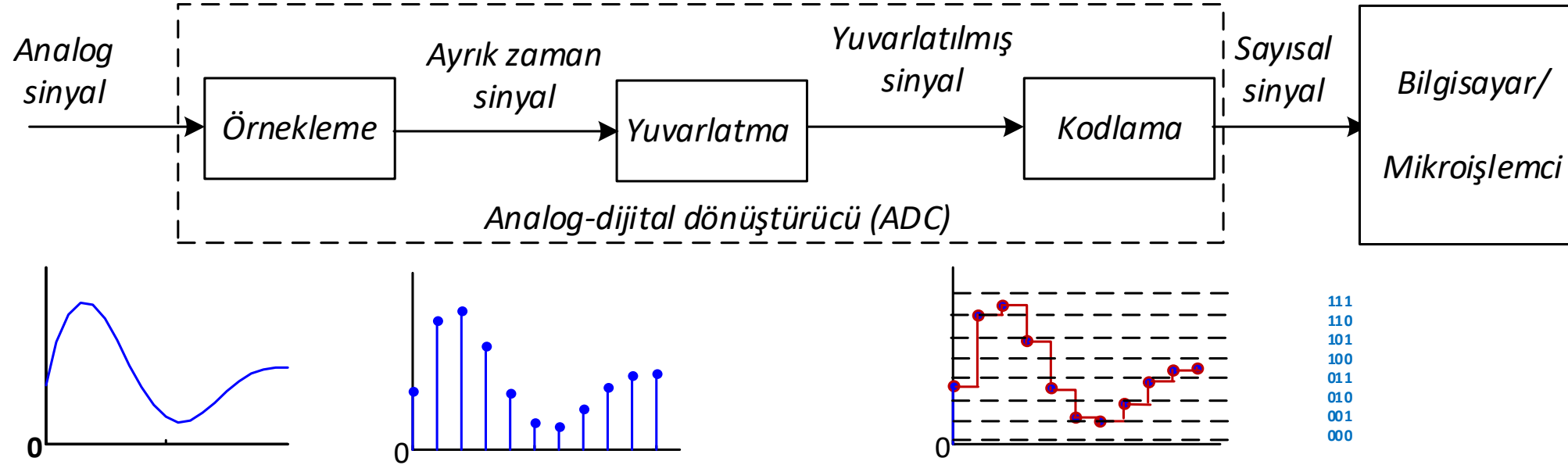
İmpuls / birim impulse sinyaller:



Rampa / birim rampa sinyaller:

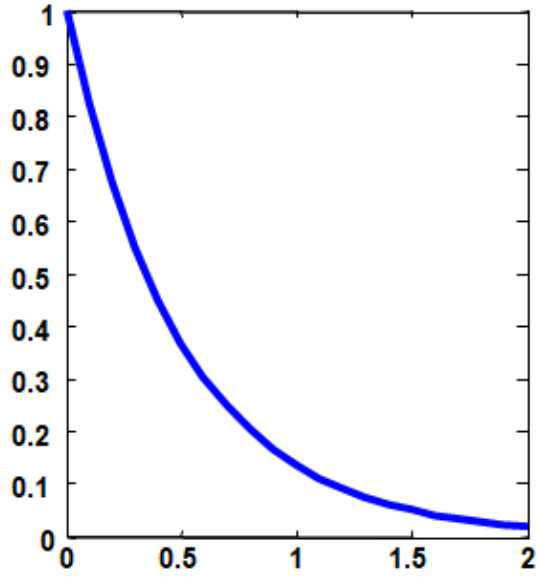


1.3 Sürekli Zaman Sinyallerin Ayırıklaştırılması / Örnekleme

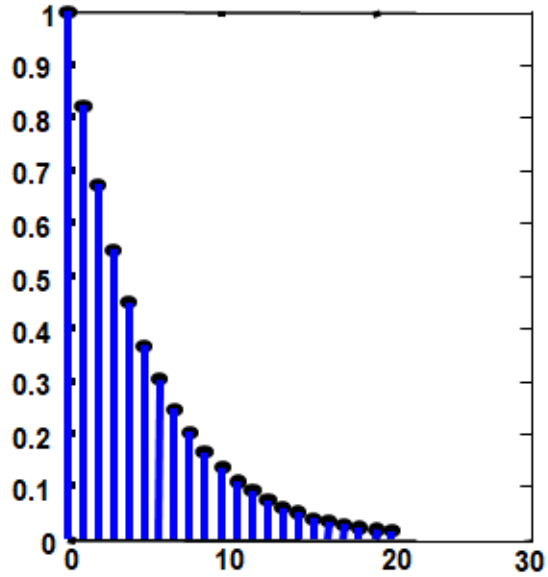


Analog ya da sürekli zaman sinyallerin örneklenerek ayrıklaştırılması: $t=kT$

Sürekli zaman üstel fonksiyonu ayrıklaştırınız ve grafiğini çizen bir MATLAB programı yazınız.



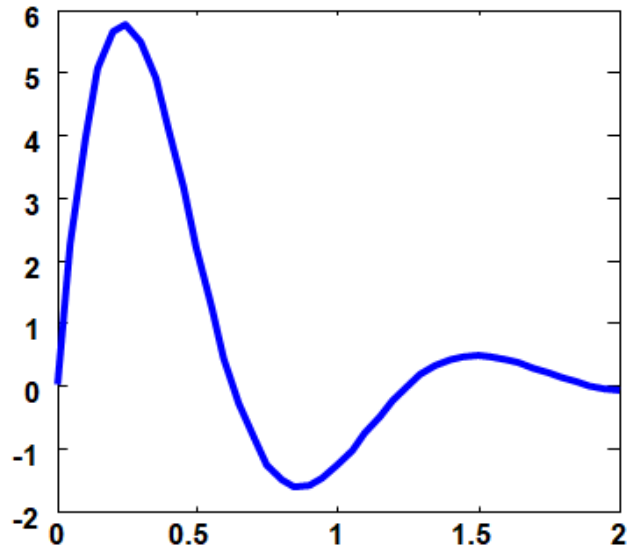
$$f(t) = e^{-2t}$$



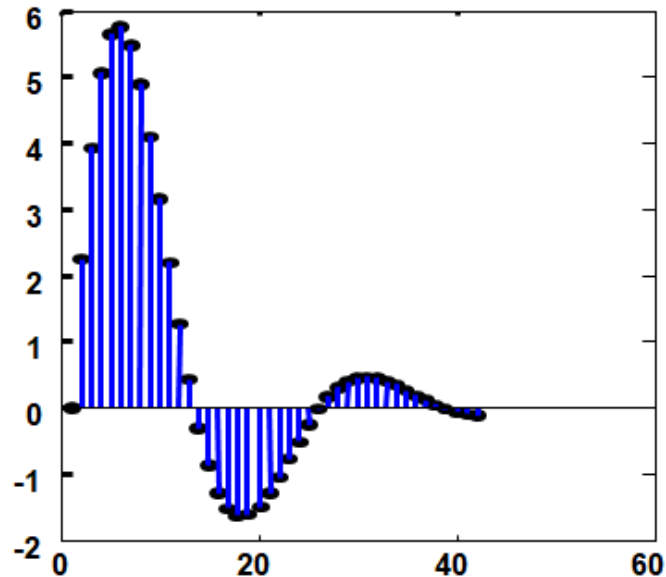
$$f(k) = a^k$$

Sönümlü sinüsoidal bir fonksiyonun ayrıklaştırılması. **T=?**

Sönümlü sinüsoidal fonksiyonu ayrıklaştırınız ve grafiğini çizen bir MATLAB programı yazınız.



$$f(t) = 10e^{-2t} \sin(5t)$$



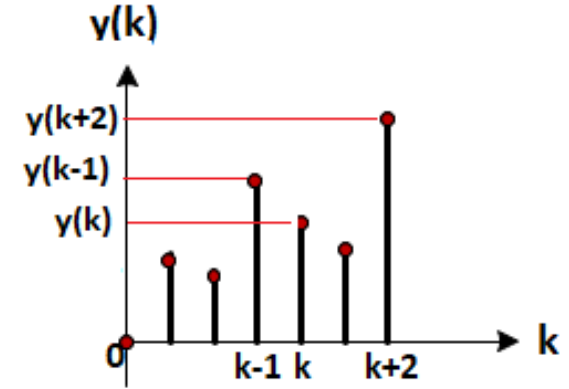
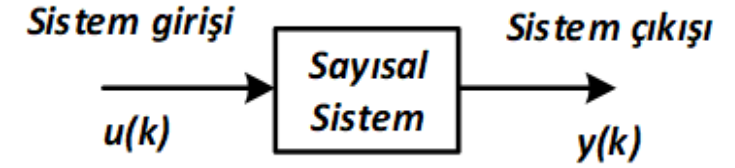
$$f(k) = 10e^{-0.1k} \sin(0.25k)$$

1-) Verilen sinyali ayrıklaştırarak grafiğini çizen bir MATLAB programı yazınız. **T=?**

$$f(t) = te^{-10t}$$

1.4 Sayısal (Ayrık zaman) Sistemler

- Ayrık zaman sistem, **ayrık zaman $u(k)$ giriş sinyalini** alarak ayrık zamanda tanımlı bir giriş-çıkış ilişkisi verir.
- Ayrık zaman sistemlerde, sinyallerin **o anki, önceki ve sonraki** değerleri kullanılabilir.
- **Statik / Dinamik sistem** ya da **bellekli /belleksiz sistem**
- **Doğrusal / doğrusal olmayan sistem**
- **Zamanla değişen / zamanla değişmeyen sistem**



$$y(k) = ke^{-0.2u(k)}$$

$$y(k) = \sin(10k)u(k+1)$$

$$y(k) = 2u(k) + 1$$

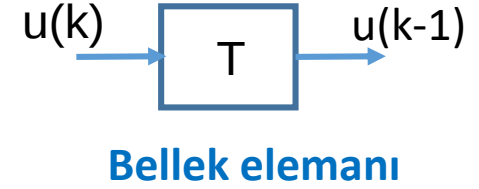
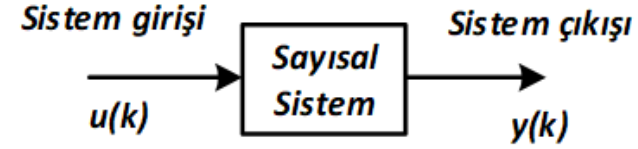
$$y(k) = e^{-0.2k}u(k)$$

$$y(k) + 0.8y(k-1) = u(k)$$

Ayrık zaman Sistemlerin Cevabını Bulma

a-) Sistemlerin zaman bölgesi blok şemasını çiziniz.

b-) **birim basamak, birim impuls ve birim rampa** cevaplarını $k=0,1,2$ örnek için iteratif çözerek bulunuz.



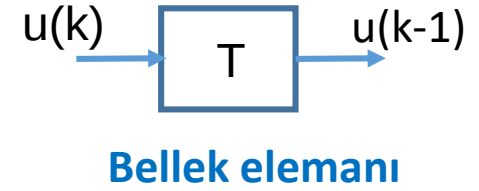
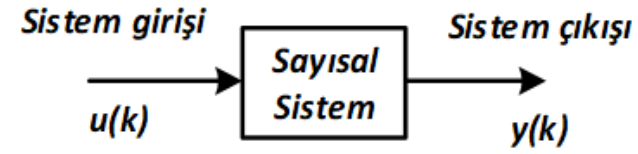
1-) $y(k) = ke^{-0.2u(k)}$

2-) $y(k) = u(k) + 0.5u(k-1)$

Ayrık zaman Sistemlerin Cevabını Bulma

- a-) Sistemlerin zaman bölgesi blok şemasını çiziniz.
b-) **birim basamak, birim impuls ve birim rampa** cevaplarını $k=0,1,2$ örnek için iteratif çözerek bulunuz.
c-) Cevapları bulan MATLAB programı yazınız.

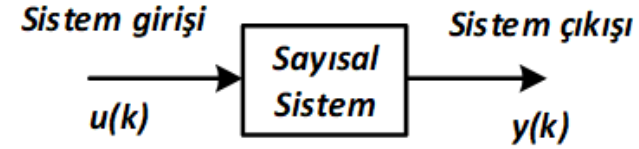
3-) $y(k) + 0.8y(k-1) = u(k)$



Ayrık zaman Sistemlerde Kararlılık

Kararlılık: Sınırlı girişe karşı sınırlı çıkış veren sistemler SGSÇ kararlıdır.

$|u(k)| < a$ için $|y(k)| < b < \infty$ ise kararlı



Örnekler: Kararlı olup olmadıklarını gösteriniz.

$$y(k) = ke^{-0.2u(k)}$$

$$y(k) = u(k) + 0.5u(k-1)$$

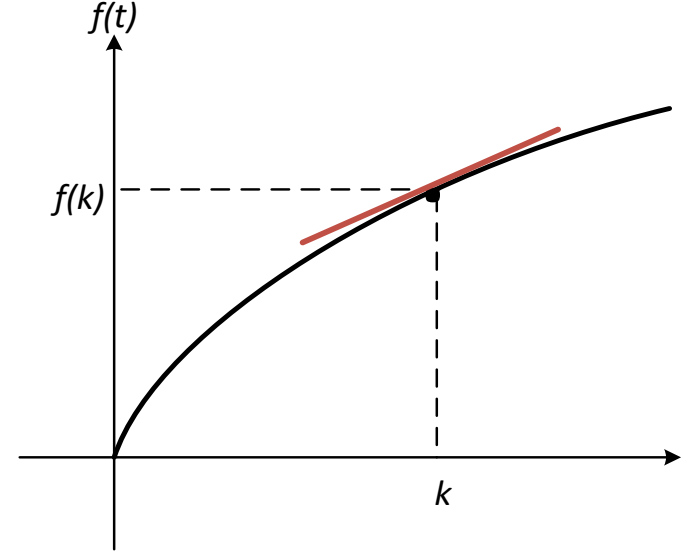
$$y(k) + 2y(k-1) = u(k)$$

1.4 Sürekli zaman sistemlerin ayrıklaştırılması

- **Sayısal Türev:** Bir sinyalin herhangi bir noktadaki türevi sinyalin o noktadaki eğimidir.

Bir $f(t)$ sinyalinin türevi $y(t)$ ile gösterilirse bu sinyalin **herhangi bir t (yada k , kT) noktasındaki eğimi**, sinyalin o noktadaki teğetinin zaman eksenine ile yaptığı açı kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \tan \alpha$$

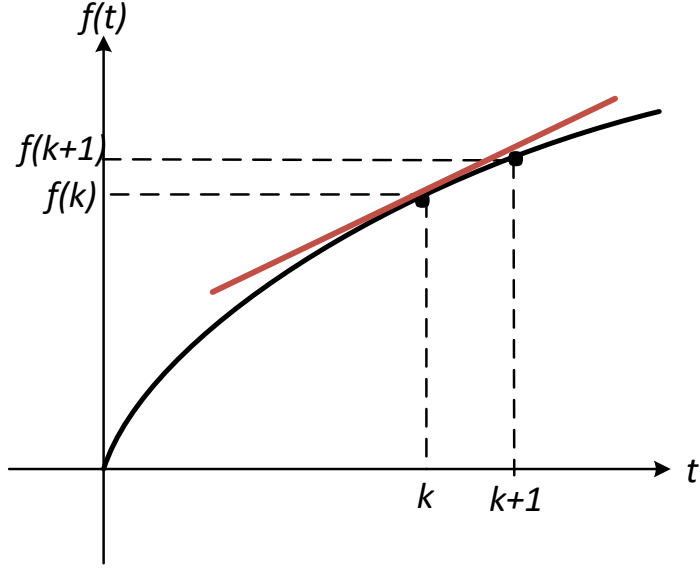


Fonksiyonun eğimi, farklı yaklaşımlarla bulunabilir.

Bunlardan **ileri fark, geri fark ve merkezi fark** olarak bilinen yöntemler yaygın olarak kullanılmaktadır.

İleri Fark Yöntemi

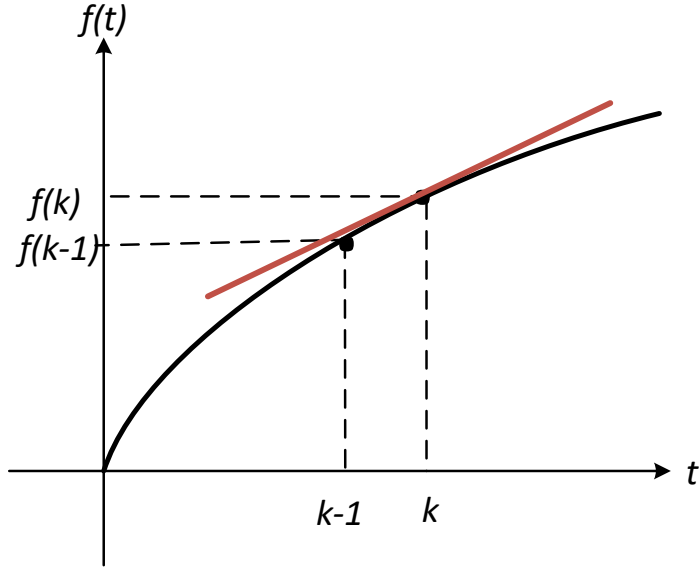
- İleri fark yönteminde fonksiyonun bir gelecekteki örneklenmiş değeri kullanılarak fonksiyonun o andaki eğimi yaklaşık olarak hesaplanabilir. **Örnek:** Verilen fonksiyonun **sayısal türevini** bulunuz.



$$f(t) = e^{-2t} \text{ ise } y(t) = f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

Geri Fark Yöntemi

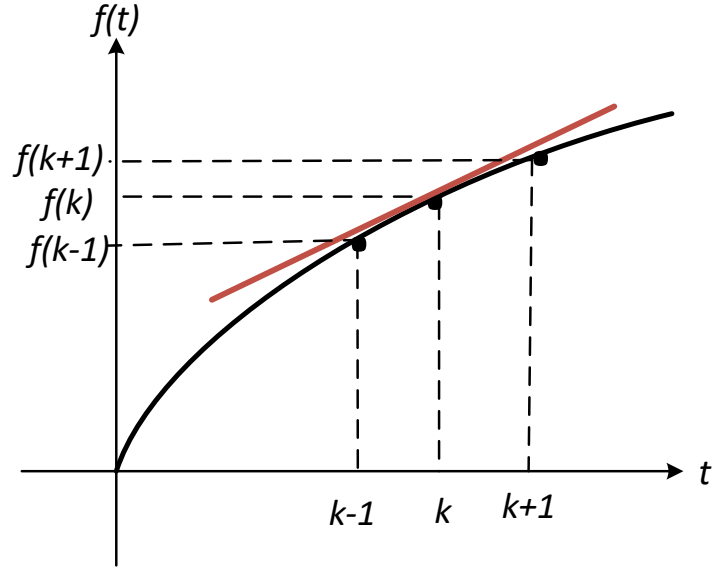
- Geri fark yönteminde fonksiyonun bir önceki örneklenmiş değeri kullanılarak fonksiyonun o andaki eğimi yaklaşık olarak hesaplanabilir. **Örnek:**



$$f(t) = e^{-2t} \text{ ise } y(t) = f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

Merkezi Fark Yöntemi (Bilineer Dönüşüm-Tustin Algoritması)

Merkezi fark yönteminde ise fonksiyonun bir önceki ve bir gelecekteki örneklenmiş değerleri kullanılarak fonksiyonun o andaki eğimi yaklaşık olarak hesaplanabilir. **Örnek:**



$$f(t) = e^{-2t} \text{ ise } y(t) = f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

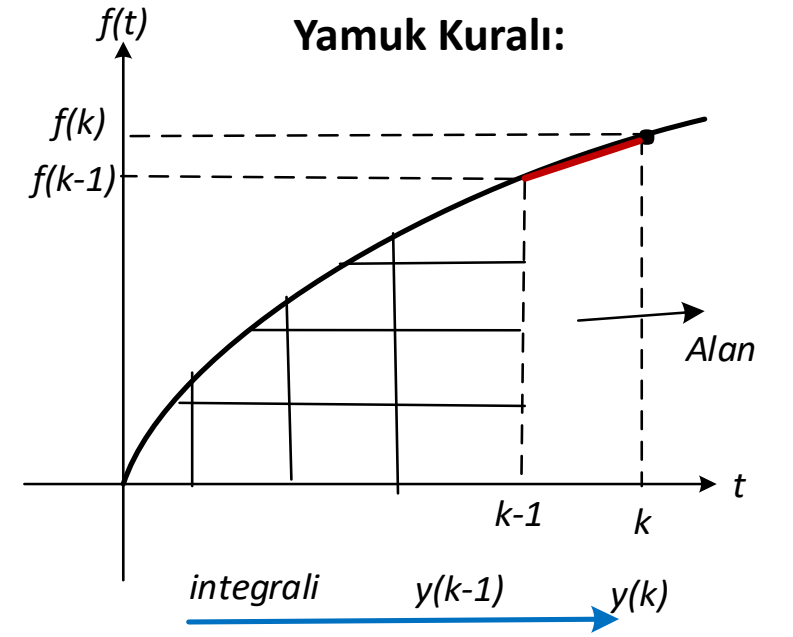
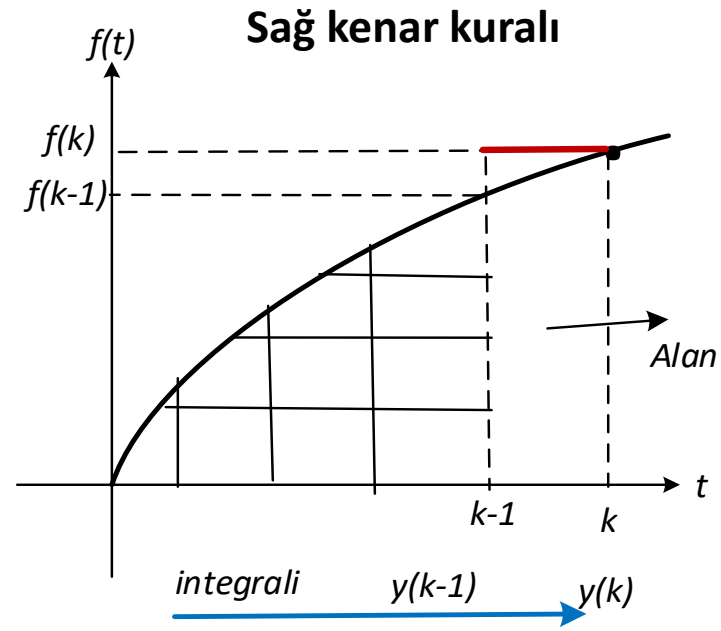
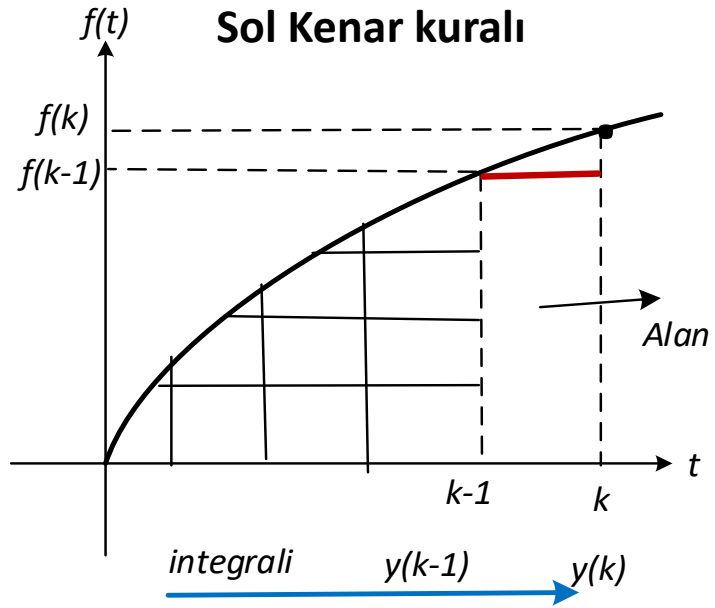
Sayısal İntegral

- Bir sinyalin herhangi bir andaki integrali (***belirli-sınırlı integrali***) bu sinyalin o ana kadar taradığı alanın toplamıdır. Bir $f(t)$ fonksiyonun integrali $y(t)$ ile gösterilirse t anındaki integral,

$$y(t) = \int_{t_0}^t f(t)dt + y(t_0)$$

- Bir fonksiyonun herhangi bir t anındaki taradığı alanı bulmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Burada en çok kullanılan ***sol kenar, sağ kenar ve yamuk yöntemleri*** verilmiştir.

Sayısal İntegral



Örnek

$$f(t) = e^{-2t} \text{ ise } y(t) = \int_{t_0}^t f(t) dt$$

Örnekler

1-) Kapasitansı $C=0.1$ F olan bir kondansatöre birim rampa gerilim uygulanmıştır. Değişik yöntemlerle kondansatörün akımını sayısal olarak bulan bir MATLAB programı yazınız.

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$$

2-) Endüktansı $L=0.2$ H olan bir bobine uygulanan gerilim aşağıda verilmiştir. Değişik yöntemlerle bobinin akımını sayısal olarak bulan bir MATLAB program yazınız. $v(t) = 5e^{-10t}$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt$$

1.5 Fark Denklemleri

- Sürekli zamanda **doğrusal-zamanla değişmeyen-dinamik** sistemlerin matematiksel modelleri **diferansiyel denklemlerle** tanımlanırken,
- Ayırık zaman **doğrusal-zamanla değişmeyen-bellekli** sistemlerin modelleri ise **fark denklemleri** ile tanımlanır.

Geriye farklar şeklinde yazılan fark denklemi:

$$y(k) + \dots + a_1 y(k-1) + a_n y(k-n) = u(k) + \dots + b_1 u(k-1) + b_m u(k-m)$$

Burada, $k=0$ için $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-n)$ başlangıç koşullarıdır.

Örnek:

İleri farklar şeklinde yazılan fark denklemi:

$$y(k+n) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = u(k+m) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

Burada, $k=0$ için $y(n-1)$, $y(n-2)$, $y(1)$, $y(0)$ başlangıç koşullarıdır.

Örnek:

Fark denklemleri, başlangıç koşulları hesaplanmak koşuluyla ileri ya da geri yönde ötelenebilir.

Birim rampa giriş için bir örnek geriye öteleyiniz.

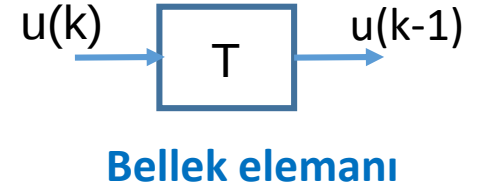
$$y(k+1) + 0.5y(k) = u(k+1) , \quad y(0) = 2$$

Birim basamak giriş için 2 örnek ileriye öteleyiniz.

$$y(k) + 2y(k-1) + y(k-2) = u(k) + 3u(k-1) , \quad y(-1) = 4, \quad y(-2) = -2$$

Fark Denklemlerinin Blok Şema ile Gösterimi ve Ardışıl (iteratif) ya da Bilgisayarla Çözümü

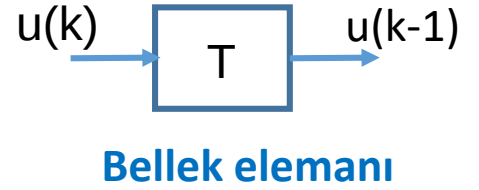
Örnek: Verilen fark denkleminin **a-)** blok şemasını çiziniz. **b-)** $k=0,1,2$ örnek için birim basamak cevabını bulunuz yani denklemini ardışıl çözünüz. **c-)** MATLAB programını yazınız.



$$y(k) + 0.5y(k-1) - 0.4y(k-2) = u(k) + 2u(k-1), \quad y(-1) = 0, \quad y(-2) = 1$$

Örnek: Verilen fark denkleminin **a-)** blok şemasını çiziniz. **b-)** $k=0,1,2$ örnek için birim basamak cevabını bulunuz yani denklemini ardışıl çözünüz. **c-)** MATLAB programını yazınız.

$$y(k+1) - y(k) + 0.8y(k-1) = u(k+1) - 0.2u(k), \quad y(0) = 0.6, \quad y(-1) = 0$$



Diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılması

Fark denklemleri, diferansiyel denklemlerin **ileri, geri ya da merkezi fark yöntemi** kullanılarak ayrıklaştırılması ile de elde edilebilir.

Örnek: Verilen diferansiyel denklemini,

a-) **Geri fark** yöntemi ile ayrıklaştırınız. $T=0.1$ alınabilir.

b-) Fark denkleminin blok şemasını çiziniz.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3u(t) \quad y(0) = 0$$

c-) Fark denkleminin **birim basamak** cevabını $k=0,1,2$ örnek için hesaplayınız.

d-) Birim basamak cevabını bulan MATLAB programı yazınız ve analog ve sayısal çözümleri karşılaştırınız.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3u(t)$$

Örnekler: İleri fark yöntemi ayrıklaştırarak blok şemasını çiziniz. $T=0.1s$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2y(t) = 4 \frac{du(t)}{dt}$$

Örnek: Seri RLC devresinin **birim basamak gerilim kaynağı** için **cevabını (akımını)** sayısal olarak bulan bir MATLAB programı yazınız. $R=2$, $L=0.1$ H, $C=0.2$ F, $T=0.1$ saniye alınız.

Fark Denklemlerinin Analitik Çözümü

Homojen çözüm ve özel çözümün toplamından meydana gelir.

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = u(k)$$

Karakteristik denklem

$$1 + a_1r^{-1} + \dots + a_nr^{-n} = 0 \text{ ya da } r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Homojen çözüm $y_h(k)$:

KD' in kökleri reel ve ayık ise

$$r_1, r_2, \dots, r_n$$

$$y_h(k) = A_1r_1^k + A_2r_2^k + \dots + A_nr_n^k$$

KD' in kökleri reel ve katlı ise

$$r_1 = r_2 = \dots = r_n$$

$$y_h(k) = A_1r_1^k + A_2kr_1^k + \dots + A_nk^{n-1}r_1^k$$

KD'in kökleri kompleks ise $r_1 = a + jb, r_2 = a - jb$

$$y_h(k) = A_1\alpha^k \cos(k\varphi) + A_2\alpha^k \sin(k\varphi), \quad \alpha = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \tan^{-1}(b/a)$$

Özel çözümü

Diferansiyel denklemlerde olduğu gibi kaynak fonksiyonunun türüne bağlı olan, bir de özel çözüm vardır.

Kaynak

özel çözüm

$$K.1^k$$

$$y\ddot{o}(k) = C.1^k$$

$$(a)^k$$

$$y\ddot{o}(k) = C.(a)^k$$

$$k^n$$

$$y\ddot{o}(k) = C_1.k^n + C_2.k^{n-1}$$

$$\sin(k\varphi) \text{ ya da } \cos(k\varphi)$$

$$y\ddot{o}(k) = C_1\sin(k\varphi) + C_2\cos(k\varphi)$$

- Özel çözümün aynısı, homojen çözümde de varsa her defasında özel çözüm k ile çarpılmalıdır.
- Özel çözüm $y\ddot{o}(k)$, fark denkleminde yerine yazılarak **C katsayıları** bulunmalıdır.
- Toplam çözüm $y(k) = y_h(k) + y\ddot{o}(k)$ olduğundan başlangıç koşulları uygulanarak homojen çözümün **A katsayıları** bulunmalıdır.

Örnek: Verilen fark denkleminin **birim basamak giriş** için cevabını analitik olarak bulunuz.

$$y(k) - 0.4y(k-1) + 0.04y(k-2) = u(k) \quad , \quad y(-1) = 1, \quad y(-2) = 0$$

Çözüm:

$$y(k) = -0.1625(0.2)^k - 0.05k(0.2)^k + 1.5625(1)^k$$

Örnek: Verilen fark denklemini, analitik olarak çözünüz.

$$y(k+1) - 0.9y(k) + 0.2y(k-1) = (0.5)^k, \quad y(0) = 0, \quad y(-1) = 0$$

Çözüm:

$$y(k) = -40(0.5)^k + 40k(0.4)^k + 10k(0.5)^k$$

Örnek: Verilen fark denkleminin **birim rampa** cevabını analitik olarak bulunuz.

$$y(k) - 0.5y(k-1) = u(k) \quad , \quad y(-1) = 1$$

Çözüm:

$$y(k) = 2.5(0.5)^k + 2k - 2$$

Analog Durum Denklemlerin Ayırıklaştırılması ve Ayırık Zaman Durum Denklemleri

Analog durum denklemleri ayırıklaştırılırsa ayırık zaman durum denklemleri elde edilebilir.

Analog durum denklemleri

Ayrık zaman durum denklemleri

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \xrightarrow{\text{İleri Fark}} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \xrightarrow{\hspace{10em}} y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Örnek: Verilen durum denkleminin ayırık zaman karşılığını bulunuz. (İleri Fark yöntemi ile)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 5u(t)$$

Bölüm 2

Ayrık Zaman Kontrol Sistemlerinin Matematiksel Temelleri

2.1 z -Dönüşümü

Doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümünden yararlanıldığı gibi, doğrusal fark denklemlerinin çözümünde de z dönüşümünden yararlanır. Z dönüşümü fark denklemlerini cebirsel hale getirir. **Tek yönlü Z Dönüşümü** aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Z\{y(k)\} = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \dots$$

Örneklenmiş bir sinyalin Z dönüşümü de aşağıdaki gibi alınabilir.

$$Z\{y(kT)\} = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k}$$

Serilerin Yakınsaklığı

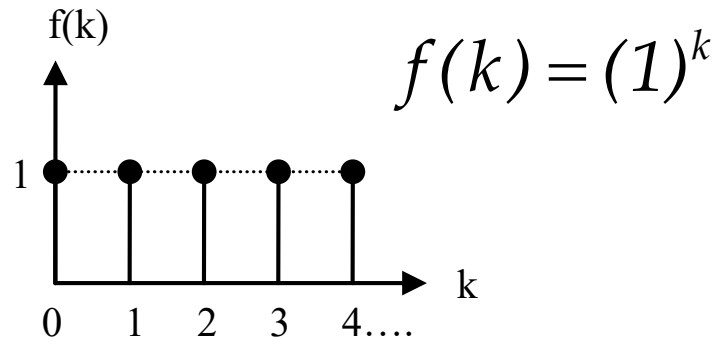
$$Z\{y(k)\} = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

Z-dönüşümüne dikkat edilirse sonsuza giden bir seridir ve seriler belirli koşullarda belirli bir değere yakınsar. Bu nedenle z-dönüşümü bulunurken serilerin yakınsaklığını da belirlemek gerekir. Çoğu seriler, aşağıdaki açılıma uygundur ve bu serilerin yakınsaklığı aşağıdaki ifade ile belirlenebilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

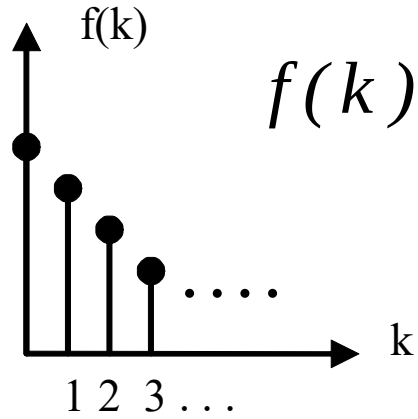
Örnek: Birim basamak fonksiyonunun Z dönüşümü



$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).z^{-k} =$$

$$F(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad |z^{-1}| < 1$$

Örnek: Ayırık zaman üstel fonksiyonun z dönüşümünü alınız.



$$f(k) = (a)^k \quad \Rightarrow \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).z^{-k} =$$

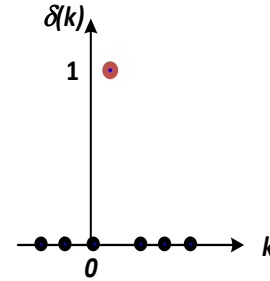
$$F(z) = \frac{1}{1 - a.z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Örnek: Ayırık zaman birim impuls fonksiyonun z dönüşümü.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k).z^{-k} = \delta(0)z^0 + \delta(1).z^{-1} + \dots = 1 + 0 + \dots = 1$$

Örnek: Geriye ötelenmiş birim impuls fonksiyonun z dönüşümü.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-1)z^{-k} = \dots + \delta(0-1)z^0 + \delta(1-1).z^{-1} + 0 + 0\dots = z^{-1}.1$$

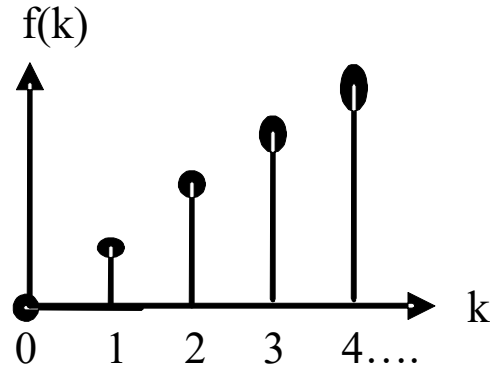


$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k+1).z^{-k} = 0 + \dots + \delta(-1+1)z^{-(-1)} + \delta(0+1).z^0 + \dots = 0 + z + 0\dots = z.1$$

Örnek: İleri ötelenmiş birim impuls fonksiyonun z dönüşümü.

Örnek: Yukarıdaki sonuçlara göre İki geriye ötelenmiş birim basamak fonksiyonun z dönüşümü nedir?.

Örnek: Birim rampa fonksiyonunun z dönüşümü



$$f(k) = k$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).z^{-k} = 0 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots \quad (1)$$

Önceki seriden farklıdır z^{-1} ile çarptıktan sonra (1) den çıkarılır
ve sağ taraf z^{-1} parantezine alınırsa,

$$(1 - z^{-1})F(z) = z^{-1} \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow F(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}$$

Örnek: Sinüsoidal fonksiyonunun z dönüşümü

Euler bağıntısı

$$f(k) = \sin(wk) \rightarrow f(k) = \frac{e^{jwk} - e^{-jwk}}{2j}$$

Seriye açılarak da Z dönüşümü bulunabilir ancak üstel ifadelerin Z dönüşümü bilindiğine göre,

$$F(z) = \frac{1}{2j} \left\{ \left[\frac{z}{z - e^{jw}} \right] - \left[\frac{z}{z - e^{-jw}} \right] \right\}$$

$$F(z) = \frac{z \sin(w)}{z^2 - 2z \cos(w) + 1}$$

Bazı Ayırık Fonksiyonların z- Dönüşümleri

Fonksiyon f(k)

Z Dönüşümü F(z)

$$\delta(k)$$

$$1$$

$$u(k)$$

$$\frac{z}{z-1}$$

$$k$$

$$\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$k^2$$

$$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$(a)^k$$

$$\frac{z}{z-a}$$

$$\sin(wk)$$

$$\frac{z \sin w}{z^2 - 2z \cos w + 1}$$

$$\cos(wk)$$

$$\frac{z(z - \cos w)}{z^2 - 2z \cos w + 1}$$

Bazı Örneklenmiş Fonksiyonların z- Dönüşümleri

<u>Analog Fonksiyon</u> $f(t)$	<u>Örneklenmiş Fonksiyon</u> $f(kT)$	<u>z- Dönüşümü</u> $F(z)$
t	kT	$T \frac{z}{(z-1)^2}$
e^{-bt}	e^{-bkT}	$\frac{z}{z - e^{-bT}}$
$\sin(\omega t)$	$\sin(\omega kT)$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos(\omega t)$	$\cos(\omega kT)$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

Bazı Önemli z – Dönüşüm Teoremleri

1-) Toplama-Çıkarma ve sabit çarpan

$$Z\{ay_1(k) \pm by_2(k)\} = aY_1(z) \pm bY_2(z)$$

2) İlk Değer Teoremi

$$y(0) = \lim_{k \rightarrow 0} y(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z)$$

3) Son Değer Teoremi

$$y(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z)$$

Örnek: İlk ve son değerlerini bulunuz.

$$F(z) = z / (z - 0.5)$$

$$F(z) = \frac{0.4z \sin 4}{z^2 - 1.6z \cos 4 + 0.16}$$

4) Karmaşık Dönüşüm (üstel ile çarpma)

$$f(k) = a^k f_1(k) \Rightarrow F(z) = F_1\left(\frac{z}{a}\right)$$

5) Rampa ile çarpma

$$f(k) = k^n f_1(k) \Rightarrow F(z) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n F_1(z)$$

Örnek: Verilen fonksiyonun z dönüşümünü bulunuz.

$$f(k) = 5k(0.8)^k$$

$$\text{Genel hali } f(k) = k(a)^k \text{ ise } F(z) = \frac{za}{(z-a)^2}$$

Örnek: $f(k) = (0.5)^k \cos(10k) \rightarrow F(z) = ?$

Sonuç $f(k) = (a)^k \sin(wk)$ ise $F(z) = \frac{za \sin wT}{z^2 - 2za \cos wT + a^2}$

$f(k) = (a)^k \cos(wk)$ ise $F(z) = \frac{z^2 - za \sin wT}{z^2 - 2za \cos wT + a^2}$

6) Geciktirme:

$$Z\{y(k-n)\} = z^{-n}Y(z)$$

İki yönlü dönüşüm

$$Z\{y(k-n)\} = \left[z^{-n}Y(z) + z^{-n} \sum_{k=-1}^{-n} y(k)z^{-k} \right]$$

Bir yönlü dönüşüm

$Z\{y(k-2)\}$?

$y(-1)=1, y(-2)=-4$ olsun.

7) Öngörme:

$$Z\{y(k+n)\} = z^n Y(z)$$

İki yönlü dönüşüm

$$Z\{y(k+n)\} = \left[z^n Y(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} y(k)z^{-k} \right]$$

Bir yönlü dönüşüm

$Z\{y(k+2)\}$?

$y(0)=-2, y(1)=3$ olsun.

Fark denklemlerinin z-dönüşümü: z bölgesi çözümü

Örnek: Verilen fark denkleminin z-dönüşümünü alarak z-bölgesi çözümünü bulunuz. $y(k) - 1.6y(k-1) + 0.64y(k-2) = u(k)$

$$y(-1) = 1, y(-2) = 0 \text{ ve } u(k) = (0.5)^k$$

$$Y(z) - 1.6\{z^{-1}Y(z) + y(-1)\} + 0.64\{z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\} = U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-0.5)(z-0.8)^2} + \frac{1.6z^2 - 0.64z}{(z-0.8)^2}$$

Örnek: Verilen fark denkleminin z-dönüşümünü alarak z-bölgesi çözümünü bulunuz.

$$y(k+2) - 1.6y(k+1) + 0.64y(k) = u(k+2)$$

$$y(0) = 2.6, y(1) = 4.02 \quad u(k) = (0.5)^k$$

NOT: Denkleme dikkat edilirse önceki örnekte verilen fark denkleminin $k=k+2$ yazılarak 2 ileri ötelenmiş halidir.

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 1.6[zY(z) - zy(0)] + 0.64Y(z) = z^2U(z) - z^2u(0) - zu(1)$$

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-0.5)(z-0.8)^2} + \frac{1.6z^2 - 0.64z}{(z-0.8)^2}$$

2.2 Ters z – Dönüşümü

Ters z-dönüşümünde genellikle kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılır.

Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemi: Verilen karmaşık ifade basit kesirlerine ayrılarak her bir basit kesrin ters z-dönüşümü bulunur.

Ancak z-dönüşüm tablosuna dikkat edilirse basit terimlerin z-dönüşümlerinin payında her zaman z çarpanı vardır. Bu nedenle, Z bölgesinde verilen bir $F(z)$ ifadesi, öncelikle

$$F(z)/z$$

haline getirilerek basit kesirlerine ayrılmalıdır.

1-) Kökler reel ve ayırık ise

Örnek $F(z) = \frac{z}{(z-1).(z-0.5)}$

Örnek $E(z) = \frac{1}{(z-1).(z-2)}$

Kökler reel ve çakışık ise,

Örnek $X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z-2)^2 \cdot (z-1)}$

$$x(k) = \frac{9}{2}k2^k - 2^k + 3u(k)$$

Karmaşık Kök Durumu

Karmaşık kök durumunda da basit kesirlere ayırma yöntemi kullanılabilir. Ancak z-dönüşüm tablosuna dikkat edilirse

karmaşık kökler sinüsoidal fonksiyonlarda ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, karmaşık kökü olan z-bölgesindeki fonksiyonlar saf sinüsoidal ya da sönümlü sinüsoidal fonksiyonlara benzetilebilir. Bu amaçla aşağıdaki z-dönüşümleri tekrar hatırlanabilir.

$$f(k) = \text{Sin}(wk) \text{ ise } F(z) = \frac{z \text{Sin } w}{z^2 - 2z \text{Cos } w + 1}$$

$$f(k) = \text{Cos}(wk) \text{ ise } F(z) = \frac{z(z - \text{Cos } w)}{z^2 - 2z \text{Cos } w + 1}$$

$$f(k) = a^k \text{Sin}(wk) \text{ ise } F(z) = \frac{az \text{Sin } w}{z^2 - 2az \text{Cos } w + a^2}$$

$$f(k) = a^k \text{Cos}(wk) \text{ ise } F(z) = \frac{z(z - a \text{Cos } w)}{z^2 - 2az \text{Cos } w + a^2}$$

Örnekler:

NOT: $\sin(wk)$ ve $\cos(wk)$ dönüşümlerini hatırla:

$$1-) F(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \text{ ise } f(k) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

$$2-) F(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1} \text{ ise } f(k) = \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

$$3-) F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 1} \text{ ise } f(k) = ?$$

$$f(k) = \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + 0.577 \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)$$

$$4-) F(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2z + 4} \Rightarrow f(k) = ?$$

$$f(k) = (2)^k \cos \frac{2\pi}{3} k - \frac{1}{\sqrt{3}} (2)^k \sin \frac{2\pi}{3} k$$

Karmaşık Kök Durumu: Basit kesirlerine ayrılarak

$$F(z) = \frac{z^2}{(z + a - jb)(z + a + jb)} \Rightarrow f(k) = ?$$

Çözüm:

$$F(z)/z = \frac{z}{(z + a - jb)(z + a + jb)} = \frac{K}{z + a - jb} + \frac{K^*}{z + a + jb}$$

Burada, karmaşık kökler kutupsal olarak, $z_{1,2} = r \angle \pm \theta$

Basit kesir katsayıları ise kutupsal olarak, $|K| \angle \pm \beta$

Hesaplanırsa,

$$f(k) = 2|K| r^k \{ \cos(\theta k) \cos(\beta) - \sin(\theta k) \sin(\beta) \}$$

Örnek: $F(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2z + 4}$

Çözüm: $F(z)/z = \frac{z}{z^2 + 2z + 4} = \frac{K}{z + 1 - j\sqrt{3}} + \frac{K^*}{z + 1 + j\sqrt{3}}$

$$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120$$

$$K = |K| \angle \beta = 0.5775 \angle 30, \quad K^* = 0.5775 \angle -30$$

$$f(k) = 2|K| r^k \{ \cos(\theta k) \cos(\beta) - \sin(\theta k) \sin(\beta) \}$$

$$f(k) = 2.(0.5775).(2)^k \{ \cos(120k) \cos(30) - \sin(120k) \sin(30) \}$$

$$f(k) = (2)^k \{ \cos(120k) - 0.5775 \sin(120k) \}$$

Örnek: Ters z- dönüşümünü alınız.

$$F(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z - 0.5)(z^2 - 1.8z + 0.8)}$$

Çözüm:

$$F(z)/z = \frac{z + 2}{(z - 0.5)(z^2 - 0.4z + 0.8)} = \frac{A}{z - 0.5} + \frac{K}{z - 0.2 - j0.4} + \frac{K^*}{z - 0.2 + j0.4}$$



$$f(k) = A(0.5)^k + 2|K| r^k \{ \cos(\theta k) \cos(\beta) - \sin(\theta k) \sin(\beta) \}$$

2.3 Fark Denklemlerinin z–Dönüşümü ile Çözümü

Örnek: Verilen fark denklemini **z dönüşümü** ile çözünüz.

$$y(k+1) + y(k) = 0, \quad y(0) = 2$$

Çözüm

$$zY(z) - zy(0) + Y(z) = 0$$

$$y(k) = 2(-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Örnek: Başlangıç koşulları verilen aşağıdaki fark denklemini z dönüşümü ile çözünüz.

$$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0, \quad x(0) = 0, x(1) = 1$$

Çözüm

$$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) + 3[zX(z) - zx(0)] + 2X(z) = 0$$

$$x(k) = (-1)^k - (-2)^k$$

Örnek: Başlangıç koşulları verilen aşağıdaki fark denklemini z dönüşümü ile çözünüz.

$$2x(k) - 2x(k-1) + x(k-2) = 1, \quad x(k) = 0 \quad k < 0$$

Çözüm $2X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) = U(z)$

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{z^2 - z}{z^2 - z + 0.5}$$

$$x(k) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$$

2.4 Transfer Fonksiyonu

- Başlangıç koşulları sıfır alınmak kaydıyla z-bölgesinde çıkışın girişe oranıdır.



$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + a_n y(k) = b_0 u(k+m) + \dots + b_m u(k)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

Örnek: Fark denklemi verilen sistemin transfer fonksiyonunu bulunuz.

$$y(k+1) + 4y(k) + 3y(k-1) = u(k) - 2u(k-1) \quad \longrightarrow \quad G(z) = ?$$

Örnek: Transfer fonksiyonu verilen sistemin fark denklemini çıkarınız.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-3}{z^2 + 4z - 5}$$

2.4.1 Transfer Fonksiyonunun Verilen Sistemin verilen bir giriş için Cevabını Bulma ve kalıcı durum kazancı



Kalıcı durum kazancı:

$$K_{dc} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

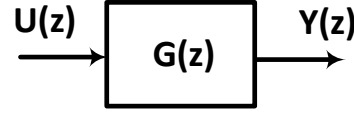
Örnek: TF verilen sistemin **z-dönüşümünü** kullanarak **birim basamak** cevabını bularak cevap eğrisini çiziniz. Kalıcı durumdaki kazancı belirleyiniz.

$$G(z) = \frac{z + 1}{(z - 0.2)(z - 0.3)}$$

$$y(k) = 3.57 + 15(0.2)^k - 18.57(0.3)^k$$

Örnek: TF verilen sistemin **birim impulse** cevabını bularak grafiğini çiziniz.

$$G(z) = \frac{z + 0.5}{(z - 0.5)^2 (z - 0.2)}$$



$$y(k) = -10\delta(k) + 38.9(0.2)^k + 13.34k(0.5)^k - 28.9(0.5)^k$$

Örnek: TF verilen sistemin **birim rampa** cevabını bularak grafiğini çiziniz.

$$G(z) = \frac{z}{(z + 0.2)}$$

$$y(k) = -0.139(-0.2)^k + 0.833k + 0.139$$

2.4.2 Transfer Fonksiyonunun kutupları, sıfırları, z-düzlemi, birim çember ve kararlılık

Örnekler

$$G(z) = \frac{z}{z + a}$$

Örnek: TF verilen sistemin kutup ve sıfırlarını z-düzleminde göstererek kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

$$G(z) = \frac{z(z + 2)}{(z - 1)(z^2 - 0.6z + 0.09)}$$

Örnek: TF verilen sistemin kutup ve sıfırlarını z-düzleminde göstererek kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

$$G(z) = \frac{z^2 - 0.2z}{z^2 - z + 0.89}$$

z-düzleminin sağ yarı ve sol yarı birim çember içerisindeki kutupların cevaba etkileri

Örnek: Verilen sistemini **birim impulse** cevabını bularak sağ yarı ve sol yarı birim çember içerisindeki kutupların cevaba etkisini belirleyiniz. **Uygun olan birim yarı çember hangisidir?**

$$G(z) = \frac{z}{(z - 0.5)(z + 0.4)}$$



Birinci dereceden ayrık zaman sistemler ve sürekli zaman sistemlerle benzerliği

Örnek: Verilen sistemlerin **birim basamak** cevaplarını, ilk değer, son değer teoremi ve kalıcı durum kazancını hesaplayarak çiziniz. Zaman sabitesi ?

$$G(s) = \frac{1}{s + 0.5}$$

$$G(z) = \frac{1}{z - 0.5}$$

İkinci dereceden ayırık zaman sistemler ve sürekli zaman sistemlerle benzerliği

Örnek: Verilen sistemlerin **birim basamak** cevaplarını, ilk değer, son değer teoremi ve kalıcı durum kazancını hesaplayarak yaklaşık olarak çiziniz. Aşırı, kritik, düşük sönümlü sistem ?

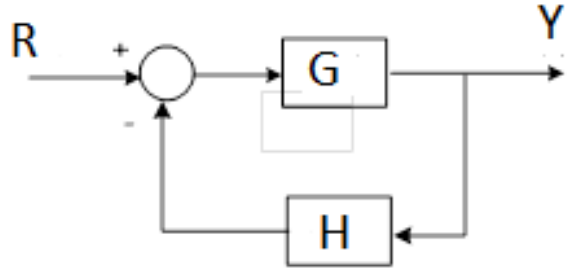
$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 5}$$

$$G(z) = \frac{z - 0.4}{z^2 - 0.8z + 0.41}$$

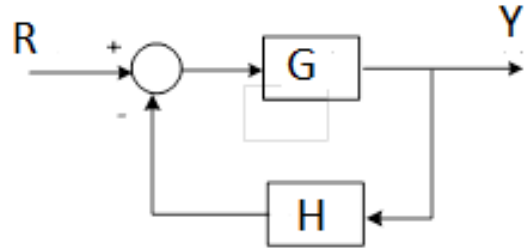
2.5 Blok Şemalar ve Sadeleştirilmesi

- Kontrol sistemlerinde birden fazla sistem (transfer fonksiyonu) geri beslemeli bir yapı içerisinde değişik şekillerde bağlanabilir.
- Dolayısıyla indirgenerek (sadeleştirilerek) tek bir blok haline getirilerek incelenmesi gerekir.
- Sürekli zaman kontrol sistemlerinin analizinde geçerli olan blok şema indirgeme kuralları, **ayrık zamanda da geçerlidir.**

Örnekler: Seri, paralel ve geri beslemeli bloklar.



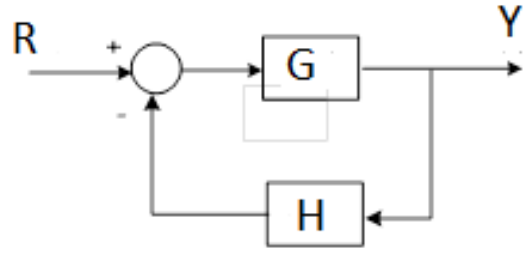
Örnek: Şekildeki kapalı çevrim kontrol sisteminin **birim impulse** cevabını **z-dönüşümü yardımıyla** bularak cevap eğrisini çiziniz.



$$G(z) = \frac{z}{z - 0.6}, \quad H(z) = \frac{1}{z - 0.4}$$

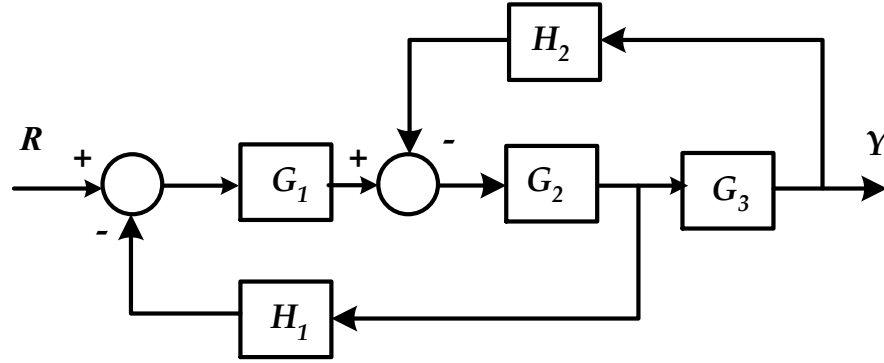
NOT: Şekildeki kapalı çevrim kontrol sistemi, çeşitli $G(z)$ ve $H(z)$ ler ve çeşitli referans girişler (impulse, basamak ve rampa gibi) için cevapları incelenebilir.

Örnek: Şekildeki kapalı çevrim kontrol sisteminin ilk değer, son değer teoremi, kalıcı durum kazancı ve sistemin kutuplarının yeri gibi bilgileri hesaplayarak **birim basamak** cevabını yaklaşık olarak çiziniz.



$$G(z) = \frac{0.5(z+1)}{z(z-0.8)}, \quad H(z) = 1$$

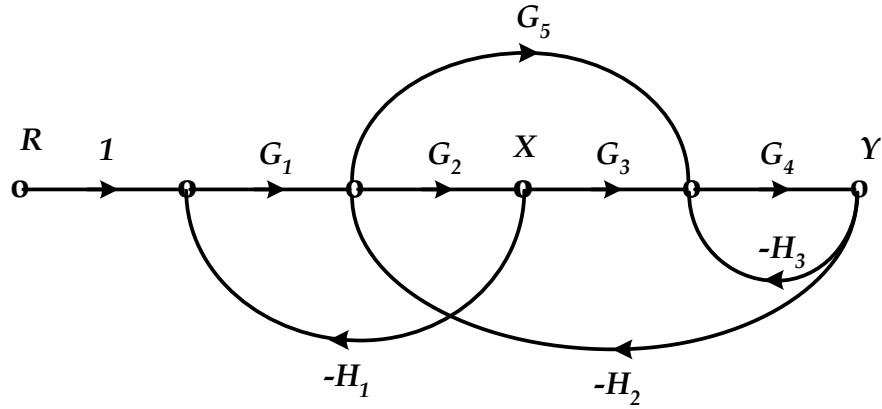
Karmaşık blok şemaların sadeleştirilmesi: Blok şemayı sadeleştiriniz. **a-)** ara sinyallerini yazıp yok ederek **b-)** Sinyal taşıyarak.



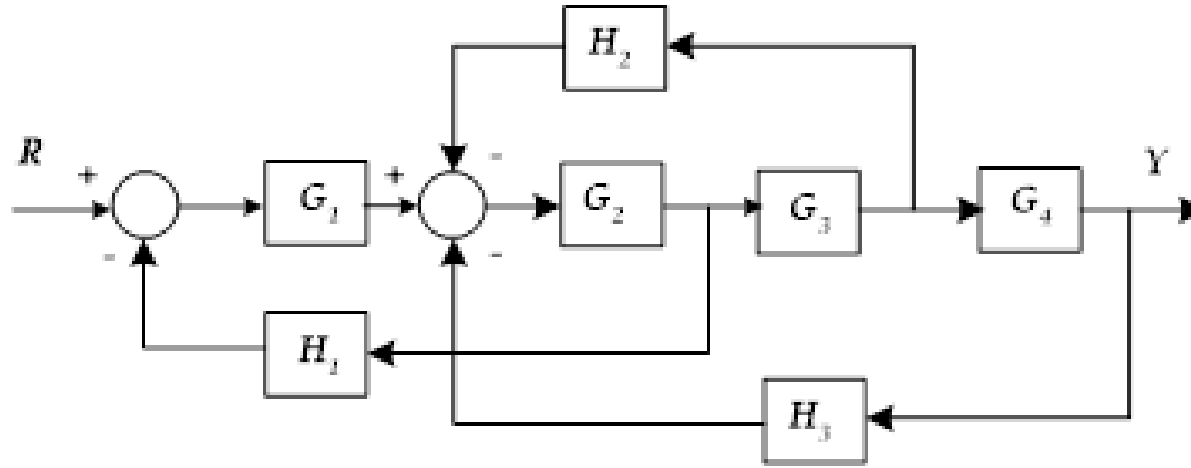
2.6 Sinyal Akış Şemaları ve Sadeleştirilmesi

Sürekli zaman kontrol sistemlerinin analizinde geçerli olan sinyal akış şeması kuralları, sinyalleri ve sistemleri ayırık zamanda tanımlamak koşuluyla **ayırık zamanda da geçerlidir**.

Örnekler: Sinyal akış şemasının blok şema karşılığını çiziniz.



Örnekler: Sinyal blok şemanın sinyal akış şema karşılığını çiziniz.

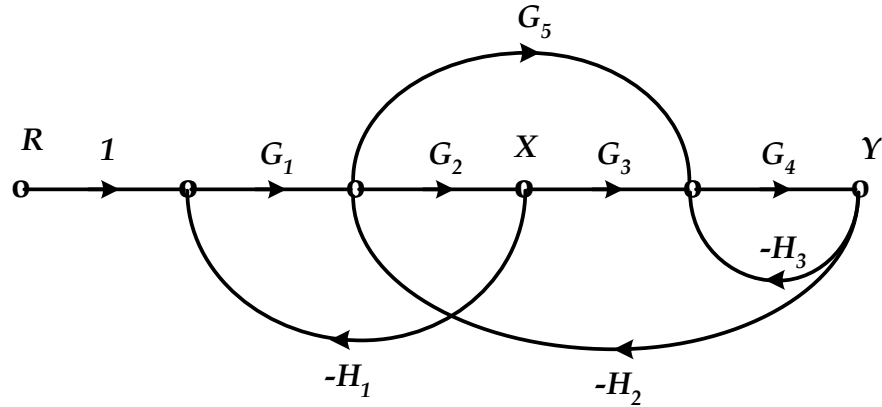
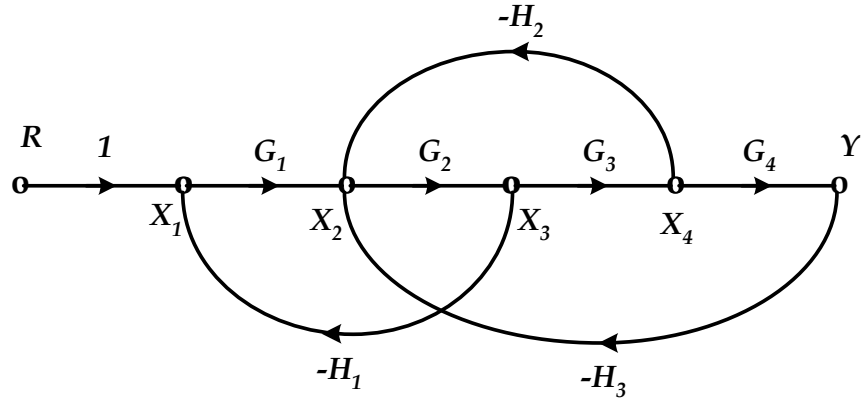


Örnek: Verilen sinyal akış şemasını, ara sinyallerini yazıp yok ederek indirgeyiniz (sadeleştiriniz.)

Kazanç formülü

Ayrık zaman sinyal akış şemaları da kazanç formülü ile sadeleştirilebilir.

Örnekler: Sinyal akış şemalarını sadeleştiriniz.



2.7 Ayırık Zaman Durum Denklemleri: İteratif ya da bilgisayarlı Çözümü

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Örnek: Verilen durum denklemini iteratif olarak çözünüz.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 5,$$

$$u(k) = 1^k$$

Çözüm:

$$k = 0 \quad \text{için}$$

$$k = 1 \quad \text{için}$$

Durum denklemlerinin z-dönüşümü ile çözümü: Durum değişkenlerinin başlangıç değeri $x(0)$ vektörü olsun.

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$X(z) = \underbrace{z(zI - A)^{-1} x(0)} + \underbrace{(zI - A)^{-1} BU(z)}$$

Örnek: Verilen durum denklemini z-dönüşümü yardımıyla çözünüz.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$u(k) = (2)^k$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X(z) = \begin{bmatrix} \frac{2z^2}{\Delta} \\ \frac{\Delta}{2z} \\ -\frac{\Delta}{\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5z^2}{(z-2)\Delta} \\ \frac{(z-2)\Delta}{-5z} \\ \frac{\Delta}{(z-2)\Delta} \end{bmatrix} \rightarrow$$

2.7.3 Durum Denkleminden Transfer Fonksiyonuna Dönüşüm

$$\begin{array}{ll} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & \longrightarrow Y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D \end{array}$$

Örnek

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad , \quad y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + 4u(k) \quad \mathbf{G(z)=?}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{4z^2 + 19z + 5}{z^2 + 3z - 8}$$

2.7.4 Fark Denkleminden Durum Denklemine Dönüşüm

Verilen fark denkleminin durum denklemini çıkarınız. **NOT: giriş sadece $u(k)$**

$$3y(k+3) + 2y(k+2) + y(k+1) + 5y(k) = 2u(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} u(k) \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Örnek:Aşağıdaki fark denkleminin durum denklemini çıkarınız.

$$y(k+2) + 2y(k+1) + 3y(k) = 4u(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

2.7.5 Transfer Fonksiyonundan Durum Denklemlerini Elde Etme

Kanonik Yöntem

Örnek: verilen transfer fonksiyonuna sinyal akış şemasını (durum diyagramı) çizin ve durum denklemlerini çıkarınız.

$$G(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^3 + 2z^2 + z + 0.5}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Seri Yöntem

Örnek: verilen transfer fonksiyonuna sinyal akış şemasını (durum diyagramı) çiziniz ve durum denklemlerini çıkarınız.

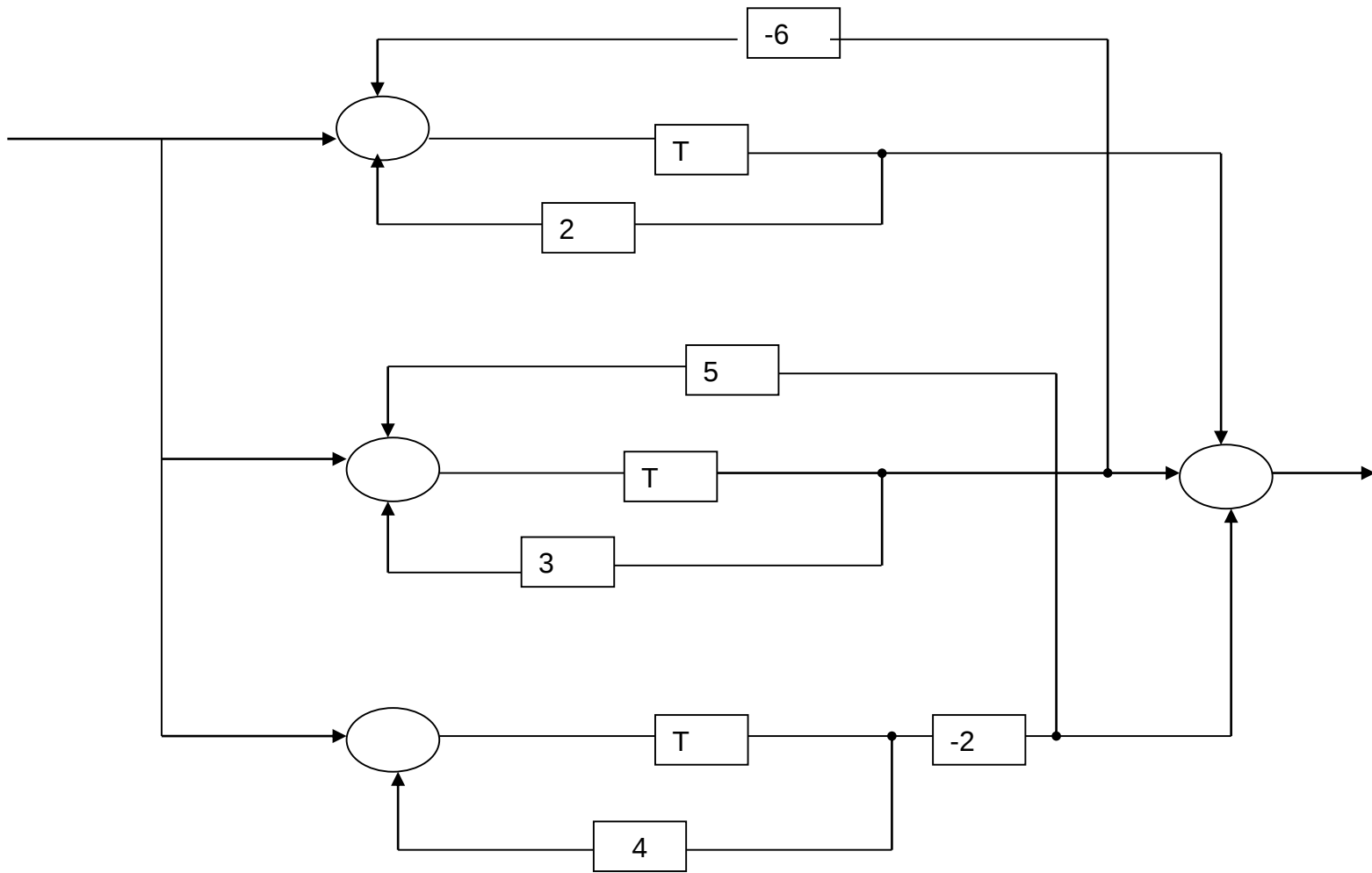
$$G(z) = \frac{z(z+2)}{(z-0.5)(z+0.8)(z^2+1)}$$

Paralel Yöntem

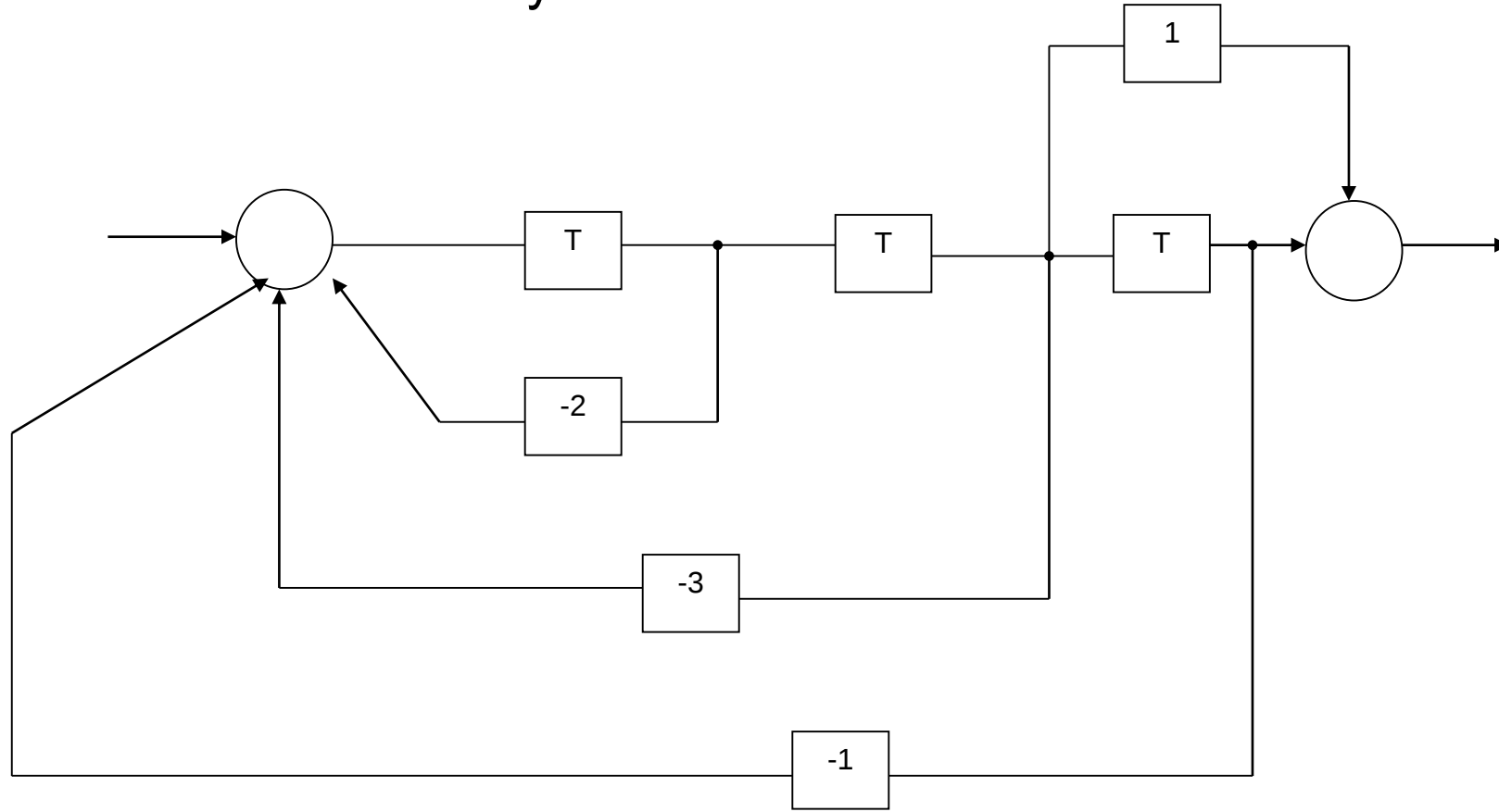
Örnek: verilen transfer fonksiyonuna sinyal akış şemasını (durum diyagramı) çiziniz ve durum denklemlerini çıkarınız.

$$G(z) = \frac{z}{(z^2 - z + 0.5)} + \frac{z + 0.6}{(z + 0.8)}$$

2.7.6 Blok Diyagramından Durum Denklemi: D.Denklemi yazınız



Örnek: Durum Denklemini yazınız.



Bölüm 3: Ayrik Zaman Kontrol Sistemlerinin Analizi

3.1 Ayriklaştırma Yöntemlerinin Laplace Karşılığı ve Kararlılığı

İleri Fark Yöntemi ya da Sol Kenar Kuralı

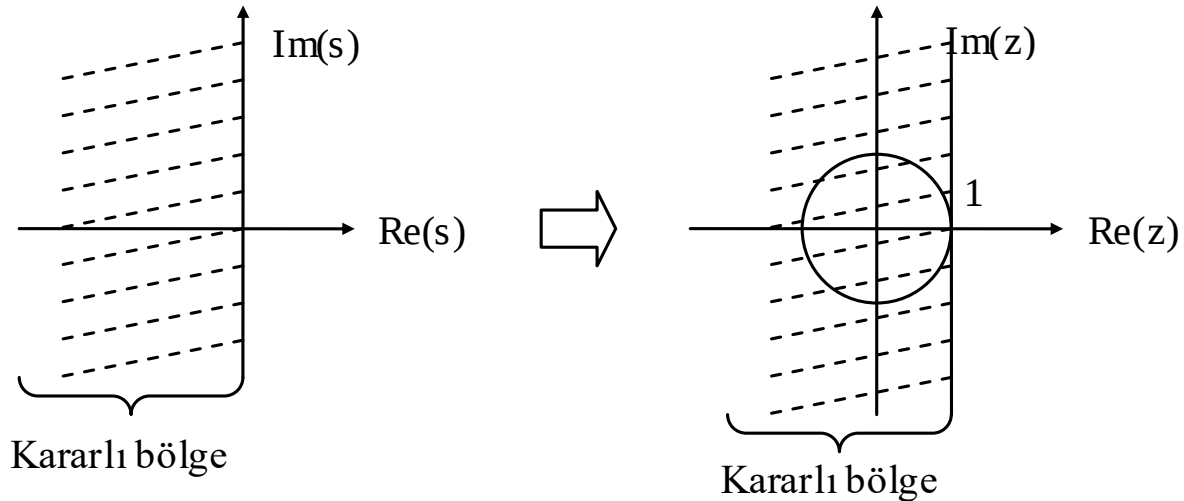
$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(k+1) - x(k)}{T} \quad \rightarrow \quad s = \frac{z-1}{T} \quad \text{Ya da} \quad z = 1 + sT$$

İleri fark yönteminin kararlılığı: $\text{Re}(s) < 0 \rightarrow \text{Re}\left(\frac{z-1}{T}\right) < 0$

$$z = x + jy \quad \text{İçin}$$



$$\frac{x-1}{T} < 0 \Rightarrow x < 1$$

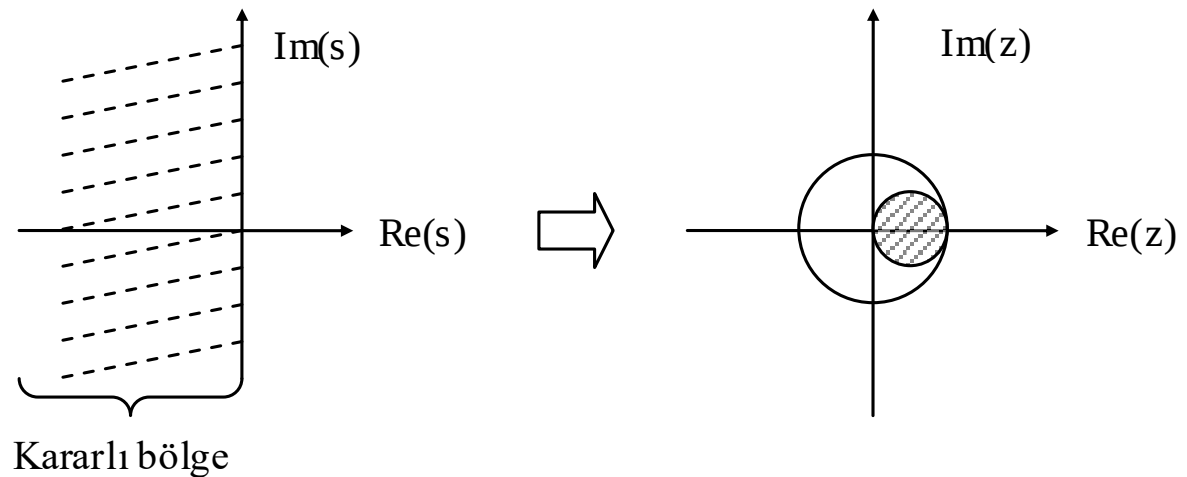


Geri Fark Yöntemi ya da Sağ Kenar Kuralı

$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(k) - x(k-1)}{T} \quad \rightarrow \quad s = \frac{z-1}{Tz} \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{1-Ts}$$

Geri Fark Yönteminin kararlılığı $\text{Re}(s) < 0$ $\text{Re}\left(\frac{z-1}{Tz}\right) < 0$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



Merkezi Fark Yöntemi ya da Yamuk Kuralı (Bilineer Dönüşüm)

$$y(t) = \int x(t) dt \quad , \quad y(k) = y(k-1) + \frac{T}{2} (x(k) + x(k-1))$$

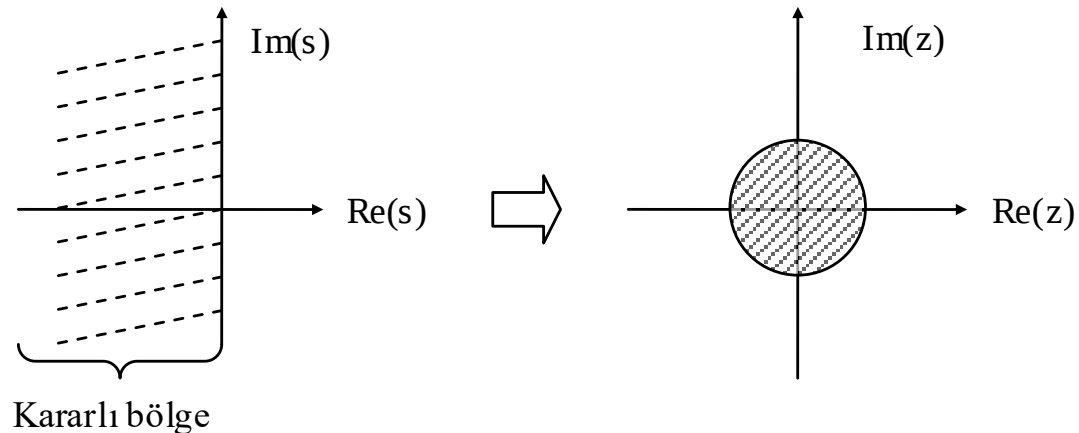
s ve z dönüşümleri karşılaştırılarak $\longrightarrow s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \longrightarrow z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$

Yamuk kuralı (bilineer dönüşüm) ile ayrıklaştırmanın kararlılığı;

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right) < 0$$



$$x^2 + y^2 < 1$$



Örnek: Verilen sistemleri farklı yöntemlerle dönüştürünüz.

a-) s ve z düzlemlerindeki kutup-sıfır yerlerini ve kararlılıklarını değerlendiriniz.

b-) hem analog hem de ayrıklaştırdığınız sayısal sistemin birim basamak cevabını bulunuz. **NOT: Uygun örnekleme peryodunu seçiniz.**

$$G(s) = \frac{1}{s + 2}$$

$$G(z) = \frac{z}{z - 0.5}$$

Örnek: Verilen sistemleri farklı yöntemlerle dönüştürünüz.

a-) s ve z düzlemlerindeki kutup-sıfır yerlerini ve kararlılıklarını değerlendiriniz.

b-) hem analog hem de ayrıklaştırdığınız sayısal sistemin birim basamak cevabını bulunuz. **NOT: Uygun örnekleme peryodunu seçiniz.**

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 4}$$

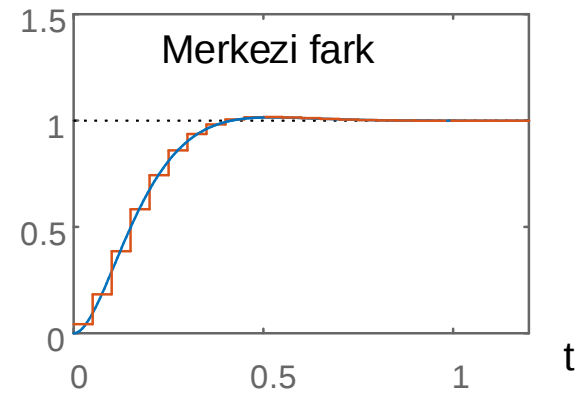
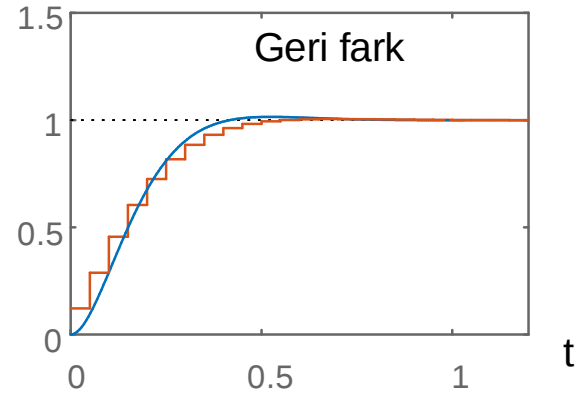
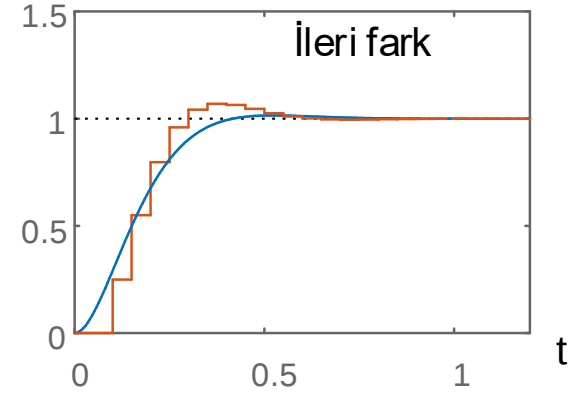
$$G(z) = \frac{0.5z}{z^2 - z + 1}$$

Örnek: İkinci dereceden bir sistemin çeşitli yöntemlerle ayrıklaştırılmış karşılıkları. $G(s) = \frac{100}{s^2 + 16s + 100}$
 $T = 0.05$ s.

$$G_1(z) = \frac{0.25}{z^2 - 1.2z + 0.45}$$

$$G_2(z) = \frac{0.25z^2}{2.05z^2 - 2.8z + 1}$$

$$G_3(z) = \frac{0.0427z^2 + 0.085z + 0.0427}{z^2 - 1.282z + 0.453}$$



3.2 Ayırık Zaman Kontrol Sistemlerinde Kararlılık Analizi

- Ayırık zaman sistemlerin kararlı olabilmesi için karakteristik denkleminin köklerinin birim çember içinde olması gerektiği bilinmektedir.
- Birim çember dışında bulunan herhangi bir kutup sistemi kararsız yapar.
- Yüksek dereceden sistemlerin köklerini bulma zorluğu nedeniyle bunun yerine **Routh-Hurwitz** ya da **Jury** kriteri ile ayırık zaman sistemlerin kararlılığı belirlenebilir.
- Routh-Hurwitz kriteri ayırık zaman sistemlerin kararlılık analizine doğrudan uygulanamaz. Ancak, bilineer dönüşüm kullanılarak verilen ayırık zaman sistemin sürekli zaman karşılığı yaklaşık olarak bulunabilir ve bulunan analog sisteme Routh-Hurwitz kriteri uygulanabilir.
- Burada Jury kriterini açıklamak yeterli olacaktır.

JURY Kriteri ile Kararlılık Analizi

Sistemin karakteristik denklemi $P(z)$ elde edilirse aşağıdaki Jury tablosu oluşturulabilir.

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

<u>Satır</u>	z^0	z^1	z^2	z^3		z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}		a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3		a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}		b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}		c_0		
6	c_0	c_1	c_2	c_3		c_{n-2}		

Jury tablosundaki katsayılar, aşağıdaki determinantlarla bulunur.

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \quad c_0 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

JURY Kararlılık Kriteri

$a_0 > 0$ olmak koşuluyla n . dereceden bir sistemin kararlı olabilmesi için aşağıdakilerden sıra ile $n+1$ adet koşulun sağlanması gerekir.

1. $|a_n| < a_0$ olmalıdır.

2. $P(1) > 0$ olmalıdır.

3. $(-1)^n P(-1) > 0$ veya $P(-1) \begin{cases} > 0 & n \text{ çift ise} \\ < 0 & n \text{ tek ise} \end{cases}$

4. $|b_{n-1}| > |b_0|$

$|c_{n-2}| > |c_0|$

...

$|q_2| > |q_0|$

NOT: Şartlardan biri sağlanmazsa sistem kararsızdır. $P(-1)=0$ ya da $P(1)=0$ olduğunda diğer şartlar sağlanıyorsa marjinal kararlıdır (yani $z=1$ de kutbu vardır), aksi halde kararsızdır.

Örnek: Karakteristik denklemi verilen sistemin kararlılığını JURY kriteri ile inceleyiniz.

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0$$

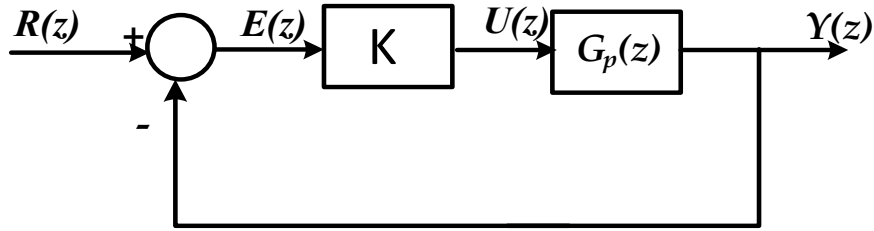
$$b_0 = -0.204 \quad b_1 = -0.075 \quad b_2 = 1.176 \quad b_3 = -0.994, \quad c_0 = 0.315 \quad c_2 = 0.94$$

Örnek: Karakteristik denklemi verilen sistemin kararlılığını JURY kriteri ile inceleyiniz.

$$P(z) = z^3 - 1.1z^2 - 0.1z + 0.2 = 0$$

$$b_0 = -0.12 \quad b_2 = -0.96$$

Örnek: Kapalı çevrim kontrol sisteminin kararlı olabilmesi için K ' nın alabileceği değer aralığını JURY kriteri ile belirleyiniz



$$G_p(z) = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}$$

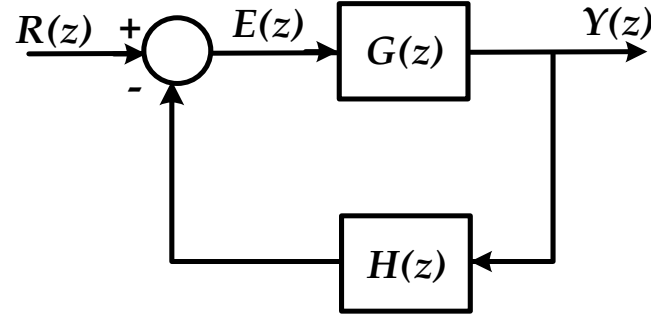
$$2.3925 > K > -5.177$$

$$K > 0$$

$$K < 26.38$$

$$2.3925 > K > 0$$

3.3 Ayırık Zaman Kontrol Sistemlerinin Tipi ve Kalıcı Durum Hataları

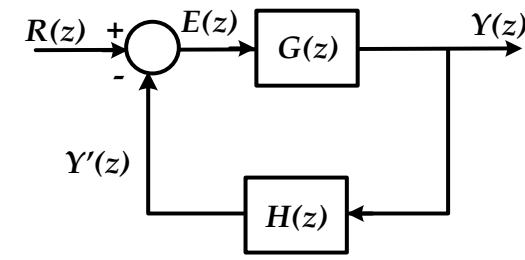


Şekildeki birim geri beslemeli kontrol sisteminde **açık çevrim transfer fonksiyonu $G(z)H(z)$** , kutup ve sıfırları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G(z)H(z) = \frac{K \prod (z - z_j)}{(z - 1)^r \prod (z - p_i)}$$

Burada, z_j - açık çevrim sistemin sıfırları, p_i -açık çevrim sistemin kutuplarıdır ve **r ise sistemin tipini** gösterir. Analog sistemlerde olduğu gibi sayısal kontrol sistemlerinde de kalıcı durum hataları, **sistemin tipine göre** değerlendirilebilir.

Hata fonksiyonu, $E(z) = \frac{1}{1 + G(z)H(z)} R(z)$



Son değer teoremi:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{1}{1 + G(z)H(z)} R(z)$$

Konum hata katsayısı K_k ve basamak hatası e_{ss}

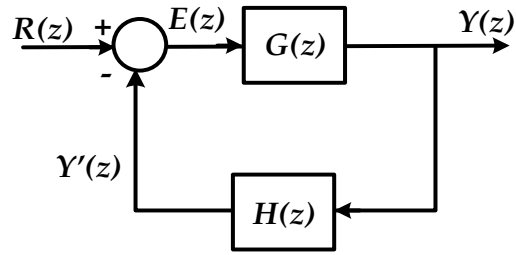
Sistem tipine göre basamak hatası yorumları?

Hız hata katsayısı K_v ve rampa hatası: e_{ss}

Son değer teoremi:
$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{1}{1 + G(z)H(z)} R(z)$$

Sistem tipine göre rampa hatası yorumları?

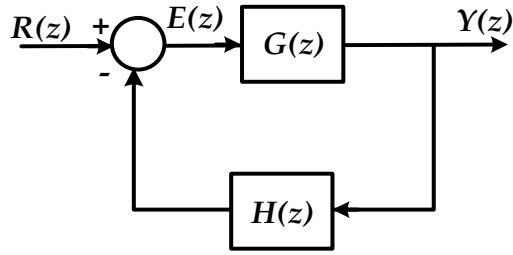
Örnek: Verilen kapalı çevrim kontrol sistemlerinin tipini ve ilgili kalıcı durum hatalarını bulunuz. $E=R-Y'$



$$a-) \quad G(z) = \frac{z}{z - 0.5} \quad , \quad H(z) = \frac{0.8}{z + 1}$$

$$b-) \quad G(z) = \frac{z - 0.1}{z^2 - 1.2z + 0.2} \quad , \quad H(z) = 1$$

Örnek: Şekildeki kapalı çevrim kontrol sisteminin ilk değer, son değer teoremi, sistem tipi ve kalıcı durum hatası, sistemin aşırı-kritik-düşük sönümü gibi bilgileri hesaplayarak **birim basamak** cevabını **yaklaşık** olarak çiziniz.



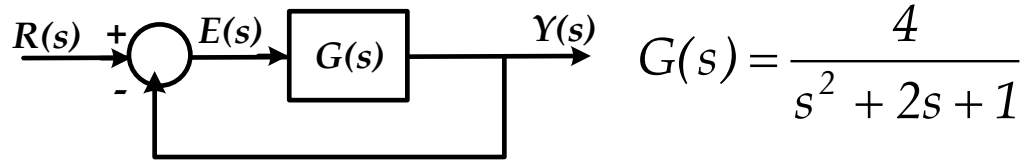
$$G(z) = \frac{z(z + 0.5)}{z^2 - 1.5z + 1}, \quad H(z) = 1$$

4.1 Ayırık Zaman Kontrol Sistemlerinin Tasarım Esasları

Ayrık zaman transfer fonksiyonu verilen ya da sürekli zamandaki transfer fonksiyondan ayrıklaştırılarak elde edilen bir sisteme sayısal PI, PD ya da PID bağlanarak çeşitli referans girişler için cevapları analog kontrol sistemlerdekine benzer şekilde bulunabilir.

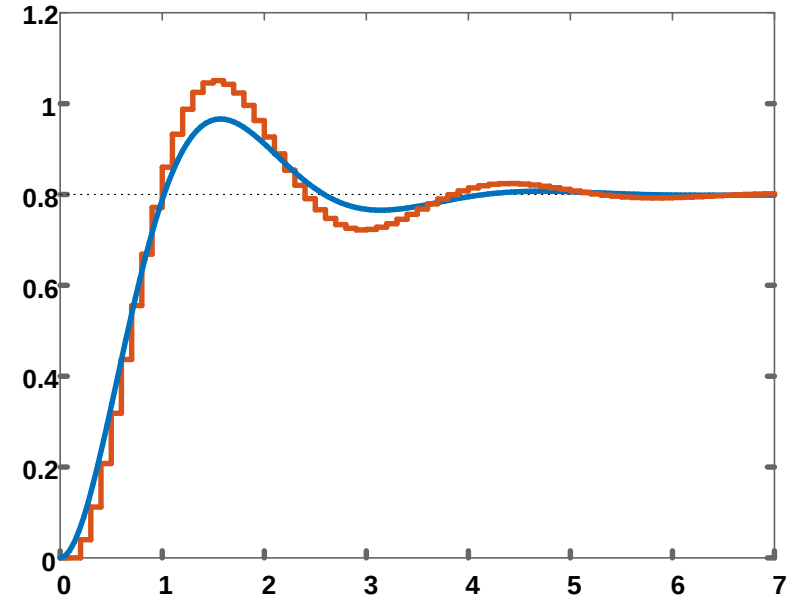
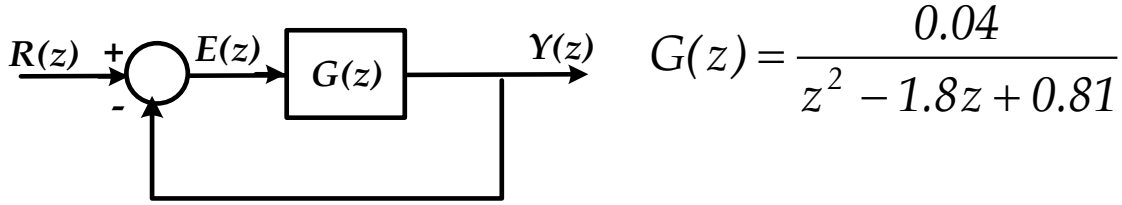
Örnek: Sürekli zaman sistemlerden hatırlatma:

Verilen ikinci dereceden sürekli zaman kontrol sisteminin birim basamak cevabını inceleyiniz. *İlk değer ve son değer teoremi, kalıcı durum kazancı, aşırı, kritik, düşük sönüm durumu ve kalıcı durum hatası, yükselme, yerleşme süresi, maksimum aşma vs. belirleyiniz.*



Örnek: Önceki örnekte verilen sürekli zaman sistemin **$T=0.1$ s örnekleme peryodu ile ve ileri fark yöntemi ile ayrıklaştırılmış karşılığı** aşağıda verilmiştir. Kontrol sisteminin birim basamak cevabını inceleyiniz.

Sönüm oranı ve doğal frekans ve dolayısıyla yükselme ve yerleşme süresi ile maksimum aşmayı ayrik zaman sistemin transfer fonksiyonundan tanımlamak mümkün mü?



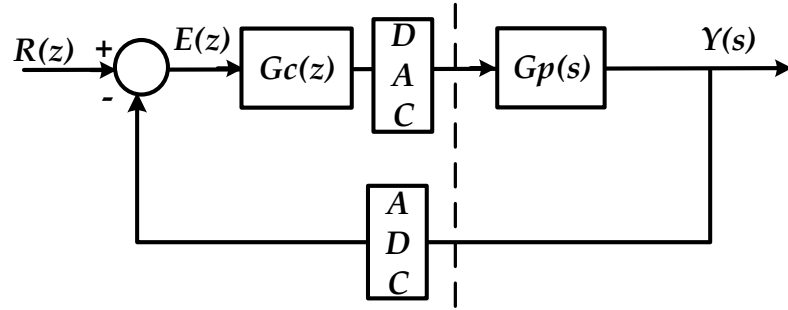
4.2 Ayırık Zaman PID Kontrolörler

Sayısal PI Kontrolörler

PI kontrolörlerin, genel olarak sistemin tipini artırarak kalıcı durum hatalarını iyileştirdiği bilinmektedir.

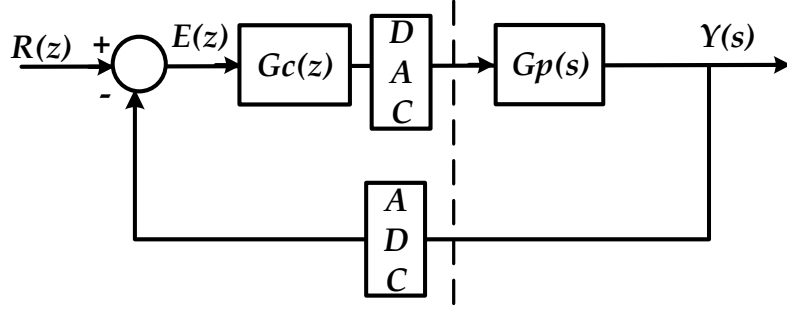
Sayısal PI kontrolörler, analog PI kontrolörler ayrıklaştırılarak elde edilebilir.

Örnek: a-) zaman bölgesinden PI kontrolörü ayrıklaştırarak ayırık zaman denklemini çıkarınız ve MATLAB programını yazınız.



$$G_c(z) = \frac{K(z - a)}{z - 1}$$

b-) Laplace bölgesi transfer fonksiyonundan analog PI kontrolörü ayrıklaştırarak sayısal karşılığını bulunuz ve sayısal PI kontrolörün MATLAB programını yazınız.



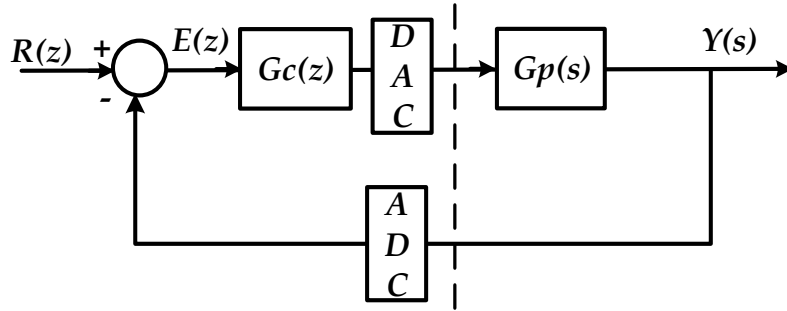
$$G_c(z) = \frac{K(z - a)}{z - 1}$$

Sayısal PD Kontrolörler

PD Kontrolör: Kontrol sisteminin geçici rejim kriterlerinden özellikle maksimum aşmayı düzelttiği bilinmektedir.

Sayısal PD kontrolörler, analog PD kontrolörler ayrıklaştırılarak elde edilebilir.

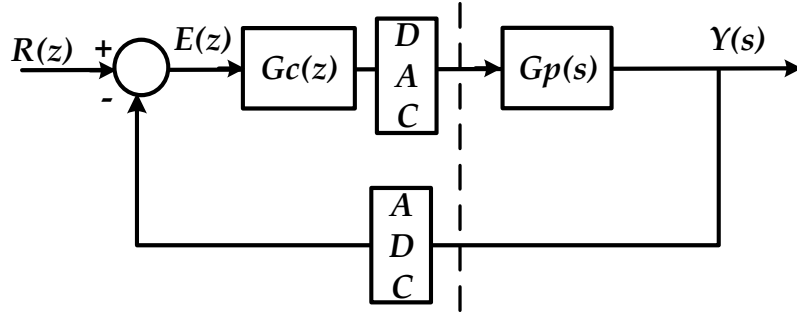
Örnek: a-) zaman bölgesinden PD kontrolörü ayrıklaştırarak ayrik zaman denklemini çıkarınız ve MATLAB programını yazınız.



$$G_c(z) = K(z - a)$$

$$G_c(z) = \frac{K(z - a)}{z}$$

b-) Laplace bölgesi transfer fonksiyonundan analog PD kontrolörü ayırıklaştırarak sayısal karşılığını bulunuz. MATLAB programını yazınız.



$$G_c(z) = K(z - a)$$

$$G_c(z) = \frac{K(z - a)}{z}$$

Sayısal PID Kontrolörler

PID Kontrolör: Kontrol sisteminin geçici+kalıcı rejim kriterlerini (aşma-yerleşme-yükselme zamanı) + kalıcı durum hatası düzeltir.

Sayısal PID kontrolörler, analog PID kontrolörler ayrıklaştırılarak elde edilebilir.

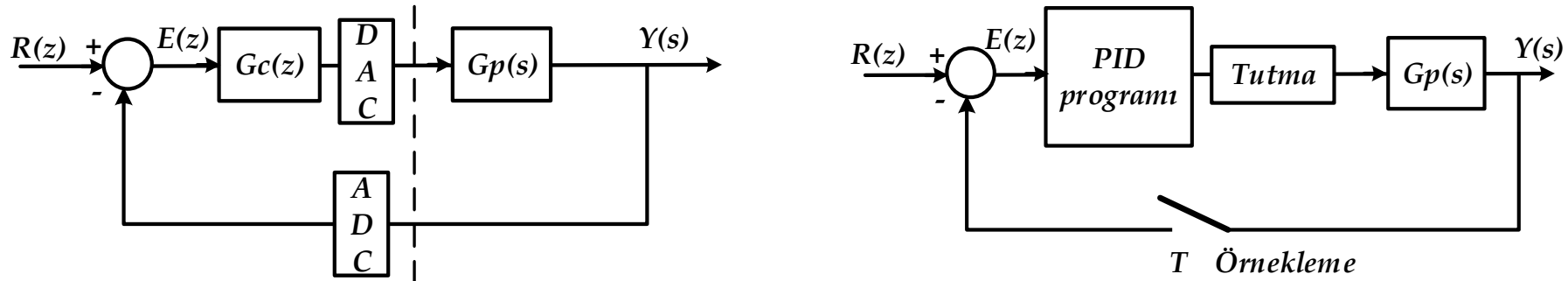
Örnek: a-) zaman bölgesinden PID kontrolörü ayrıklaştırarak ayırık zaman denklemini çıkarınız ve MATLAB programını yazınız.

b-) Laplace bölgesi transfer fonksiyonundan analog PID kontrolörü ayrıklaştırarak sayısal karşılığını bulunuz.

$$G_c(z) = \frac{K_c(z - a_1)(z - a_2)}{(z - 1)}$$

4.3 Sayısal Kontrol Sistemi Tasarımı

- Kontrol edilecek sistemler genellikle sürekli zaman (analog) sistemlerdir. Günümüzde kontrolörler ise bilgisayar ya da mikrokontrolörler vs. gibi genellikle sayısal birimlerdir.



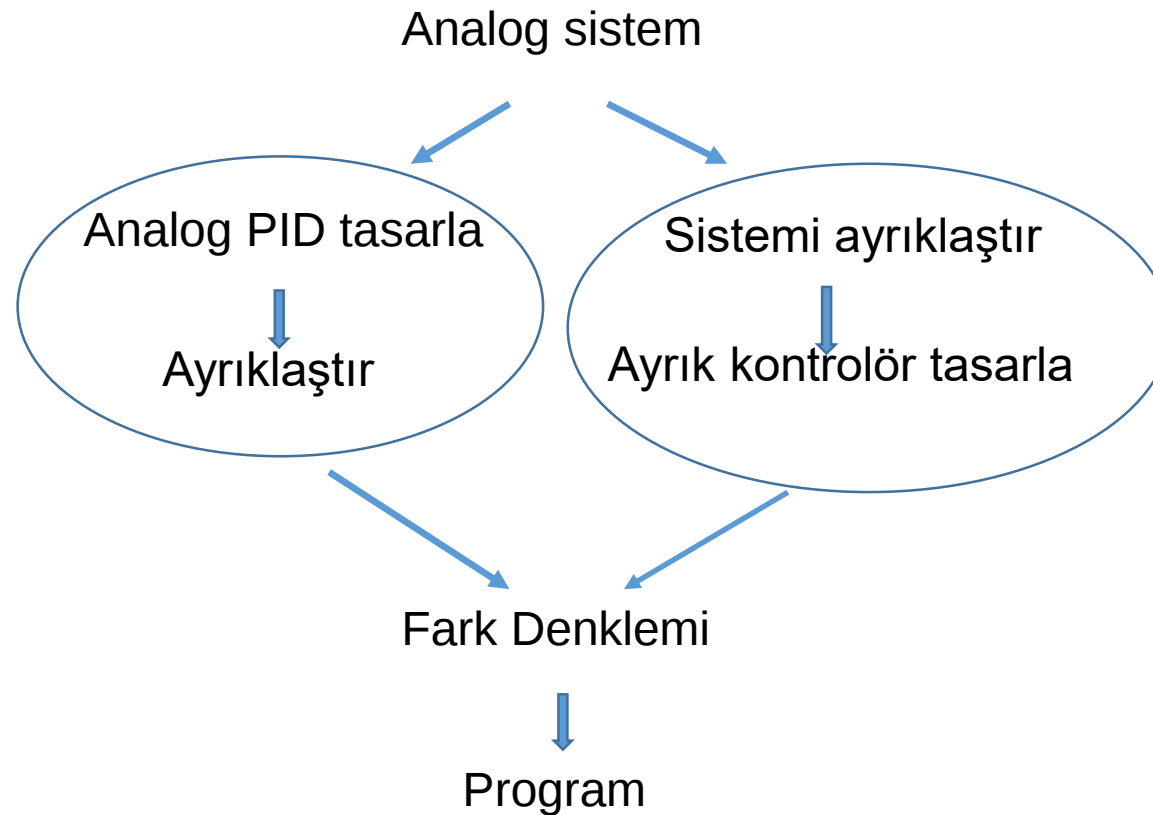
Buna göre Sayısal kontrolörlerin tasarımında iki yaklaşım izlenebilir.

- Kontrolör, önce analog olarak tasarlanır ve sonra ayrıklaştırılarak bilgisayar programları ile gerçekleştirilir. **Kontrolörü ayrıklaştırmak için merkezi fark yöntemi tercih edilir.** Kısaca,

$$G_c(z) = G_c(s) \Big|_{s=F(z)}$$

2. Önce sistem ayrıklaştırılır ve sonra kontrolör ayık zamanda tasarlanabilir. Sistemi ayrıklaştırmak için ileri, geri ve merkezi farktan başka çeşitli yöntemler kullanılabilir.

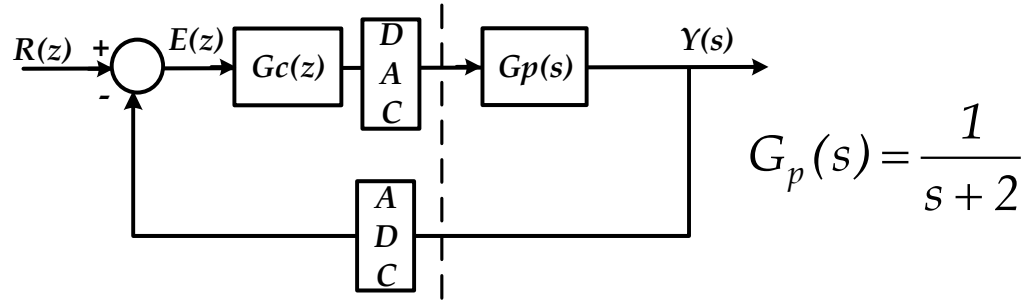
Bu tasarım yaklaşımı ile diğer ayrıklaştırma yöntemlerinden bazıları sonraki bölümlerde açıklanacaktır.



4.3.1 Analog Sistemde Analog Kontrolörü Tasarlayıp Sonra Ayırıklaştırma Yöntemi

Örnek: Şekilde verilen sayısal kontrol sisteminde sönüm oranı $\zeta = 0.8$ ve sönümsüz doğal frekansı $\omega_n = 10$ olacak şekilde PI kontrolörü tasarlayınız, ayırıklaştırınız ve MATLAB programını yazınız.

NOT: İkinci dereceden standart sisteme benzeterek PI tasarlayabilirsiniz.



$$G_c(s) = \frac{14(s+7.14)}{s}$$

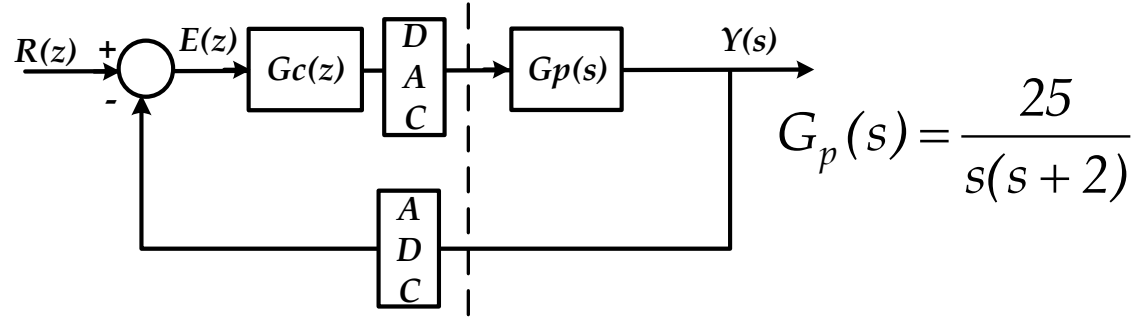
ayrıklaştırınız ve MATLAB programını yazınız. $T=0.1$

$$G_c(z) = \frac{14(s + 7.14)}{s} \bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

$$G_c(z) = \frac{19(z - 0.474)}{z - 1}$$

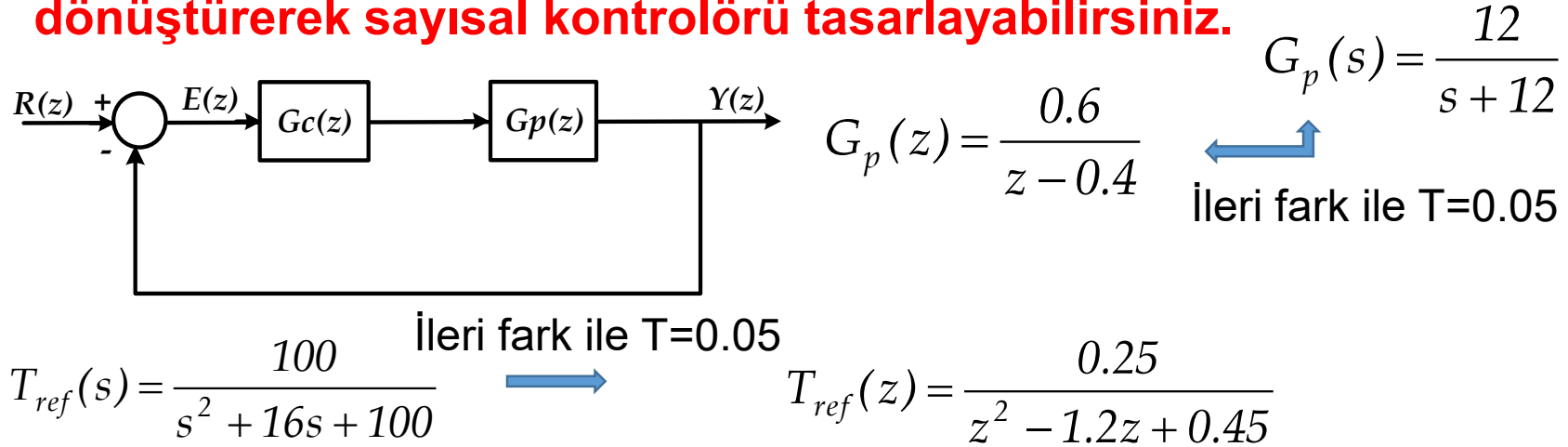
Örnek: Şekilde verilen sayısal kontrol sisteminde sönüm oranı $\zeta = 0.8$ ve sönümsüz doğal frekansı $\omega_n = 10$ olacak şekilde PD kontrolörü tasarlayınız, ayırklaştırınız ve MATLAB programını yazınız.

NOT: İkinci dereceden standart sisteme benzeterek PD tasarlayabilirsiniz.

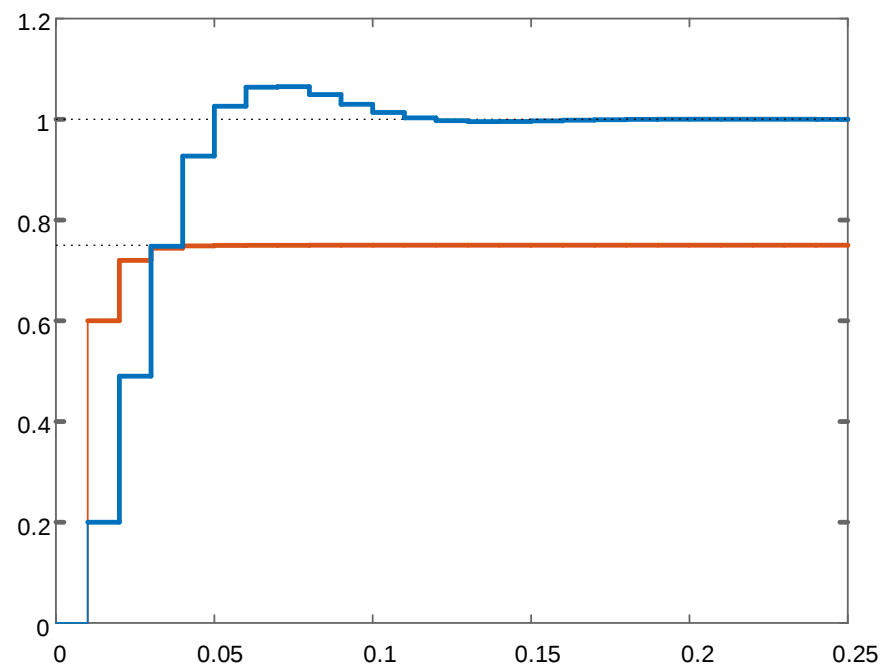


4.3.2 Analog Sistemi Ayırıklaştırarak Sayısal Bölgede Kontrolör Tasarımı

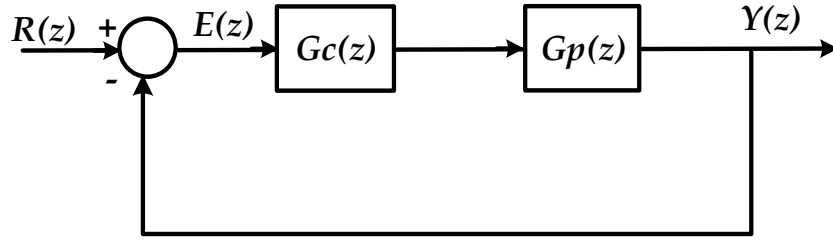
Örnek: Verilen sayısal sistem için kontrol sisteminin kutuplarının sönüm oranı $\zeta = 0.8$ ve doğal frekansı $\omega_n = 10$ olacak şekilde bir sayısal PI kontrolör tasarlayınız. **Analog referans transfer fonksiyonunu, sayısala dönüştürerek sayısal kontrolörü tasarlayabilirsiniz.**



$$G_c(z) = \frac{0.334(z + 0.25)}{z - 1}$$



Örnek: Verilen sayısal sistem için kontrol sisteminin kutuplarının sönüm oranı $\zeta = 0.8$ ve doğal frekansı $\omega_n = 10$ olacak şekilde bir sayısal PD kontrolör tasarlayınız.



$$G_p(z) = \frac{0.05}{z^2 - 1.9z + 0.9126}$$

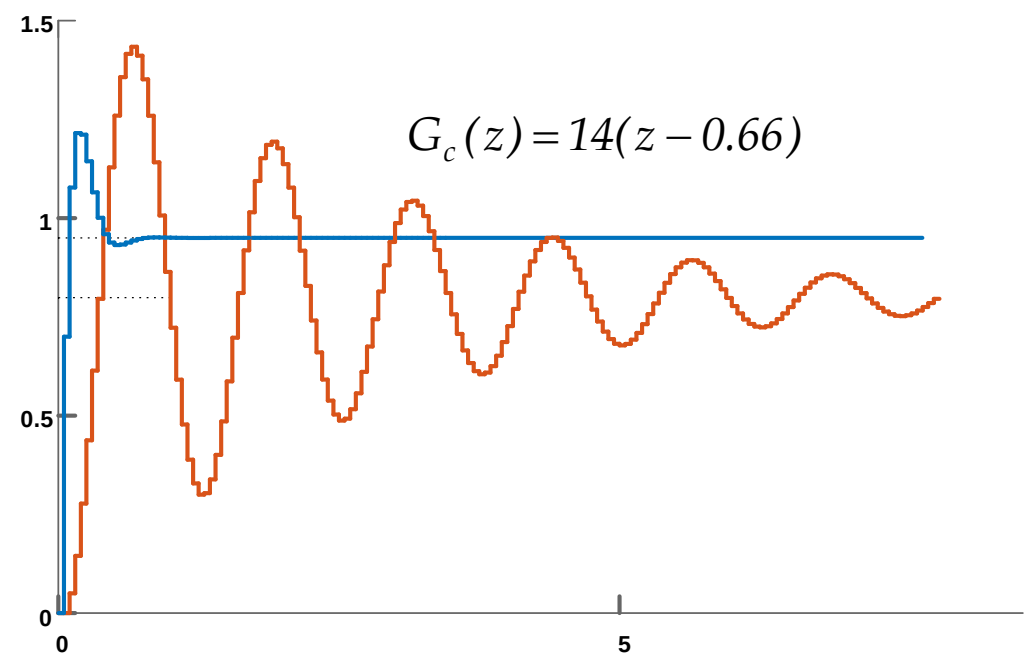
$$G_p(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 5}$$



İleri fark ile T=0.05

$$T_{ref}(s) = \frac{100}{s^2 + 16s + 100} \quad \text{İleri fark ile T=0.05}$$

$$T_{ref}(z) = \frac{0.25}{z^2 - 1.2z + 0.45}$$

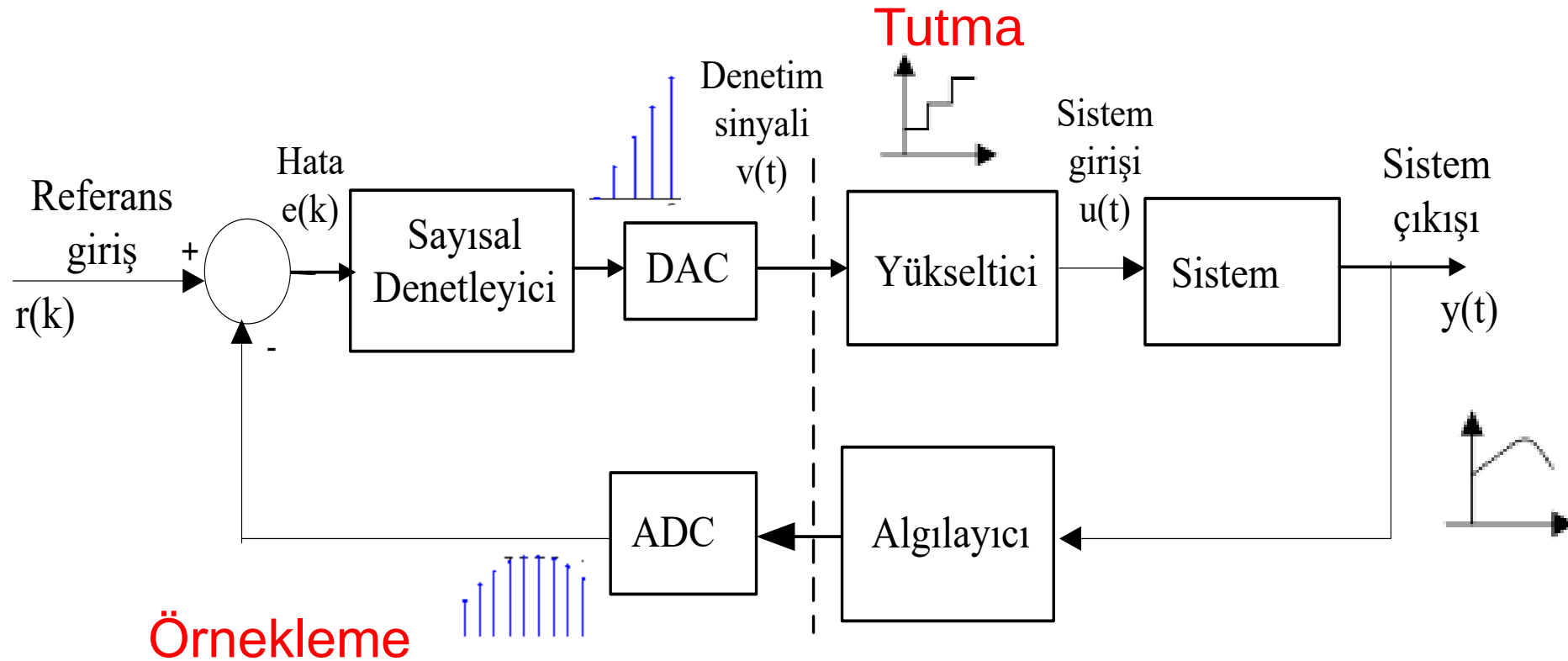


Bölüm 5

Örneklenmiş Verili Kontrol Sistemleri

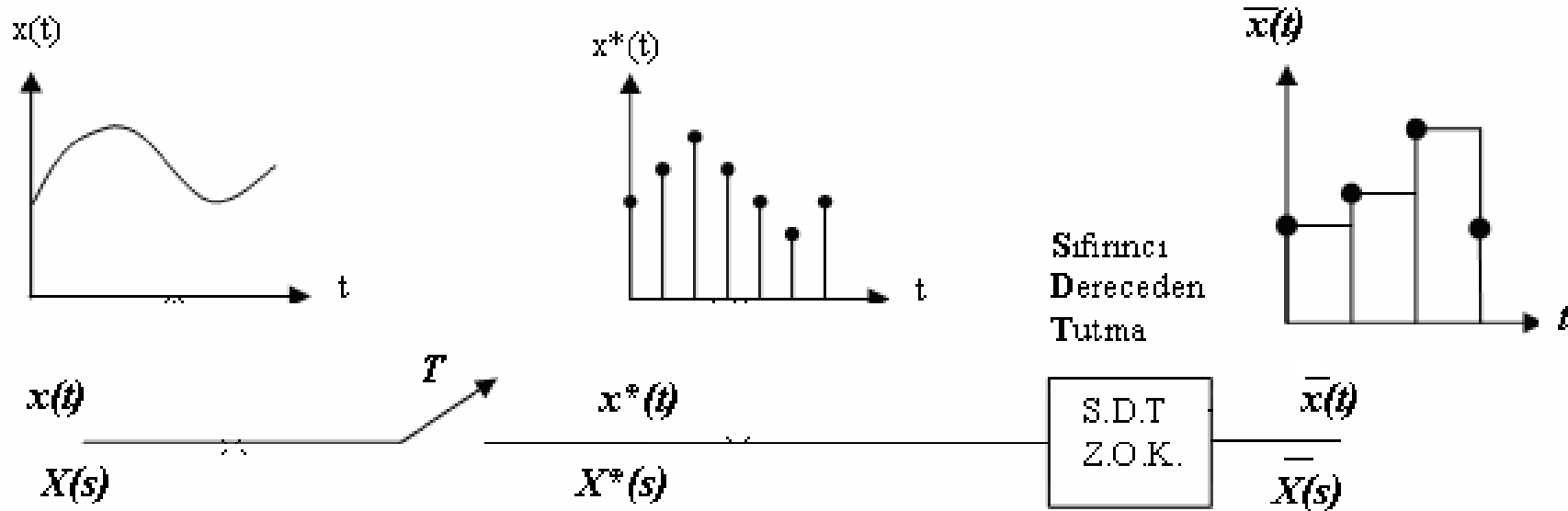
5.1 Örnekleme ve Tutma

Bölüm 1 de blok şeması verilen aşağıdaki **kapalı çevrim sayısal kontrol** sistemlerinin analiz ve tasarımında Örnekleme ve Tutma işlemleri önemli bir yer tutar.

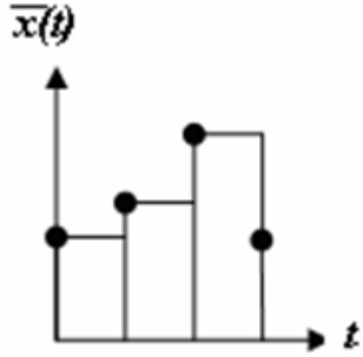


Örnekleme ve Tutma

Şekildeki gibi sürekli zaman bir sinyalin T örnekleme periyodu ile örneklendiğini ve sıfırıncı dereceden bir tutma devresi ile sürekli zamana geri dönüştürüldüğünü yani orijinal analog sinyalin geri elde edilmeye çalışıldığını kabul edelim. Tutma devreleri yüksek dereceden olabilir ancak burada sadece sıfırıncı dereceden tutma ele alınacaktır.



Sıfırıncı dereceden tutucu ile tutulmuş sinyal, darbe zincirleridir.



Bu sinyal, ötelenmiş basamaklarla tanımlanır ve LD alınırsa,

$$\bar{X}(s) = \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \right]$$

Buna göre **ikinci terim ayrılarak** $X^*(s)$ ile gösterilirse,

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \quad \longleftarrow \quad \bar{X}(s) = \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \right]$$

Örneklenmiş sinyalin Laplace Dönüşümü ortaya çıkar. Diğer taraftan örneklenmiş sinyallerin Z-dönüşümü,

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

Olduğundan örneklenmiş sinyalin LD (*yıldızlanmış sinyal*) ile z-dönüşümü alınmış sinyal arasındaki ilişkinin

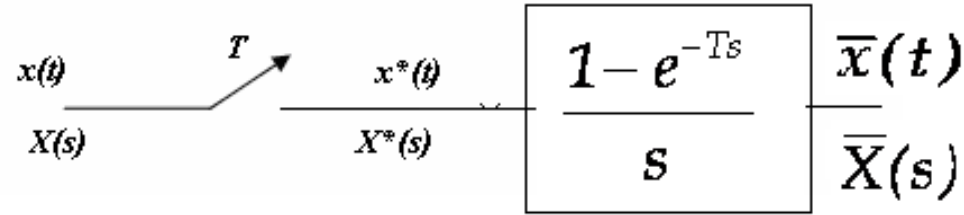
$$z = e^{sT}$$

olduğu görülür ve **standart z- dönüşümü** olarak bilinir.

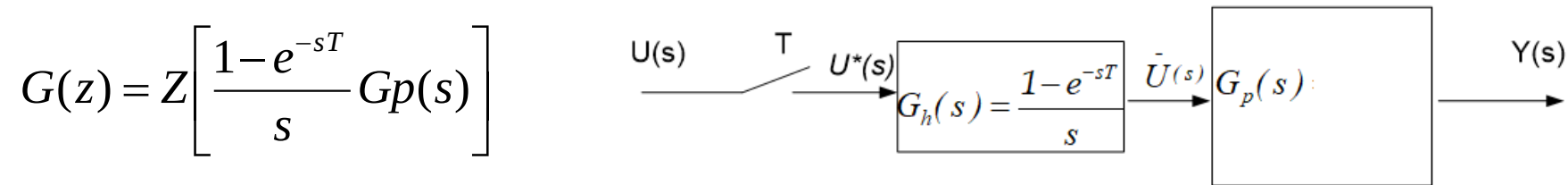
Birinci terim ayrılırsa tutma devresinin transfer fonksiyonu elde edilir.

$$\frac{\bar{X}(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = G_h(s)$$

Sonuç olarak örnekleme ve sıfırcı dereceden tutma devresi aşağıdaki blok şema ile gösterilebilir.



Buna göre bir analog sistemin önüne örnekleme ve **sıfırcı dereceden tutma (zoh)** yerleştirilirse artık sistem sayısaldır ve bu sistemi zoh yöntemi ile sayısal karşılığı,



Dönüşümü ile bulunur ve bu yöntem **zoh** ile ayırıklaştırma yöntemi denir. İleride açıklanacaktır.

Buradan, **zoh yöntemi ile ayırıklaştırmada**, **zaman bölgesinde ya da s-bölgesinde verilen** bir fonksiyonun yıldızlı dönüşümü ve sonra da z-dönüşümü alınabilir.

Zaman Bölgesinden Yıldızlı Dönüşüm ve z-dönüşümü

Zaman bölgesinde verilen sinyal örneklenerek yıldızlı dönüşümü oradan da z- dönüşümünü almak için aşağıdaki eşitlik elde edilmişti.

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

Örnek: Zaman bölgesi ifadesi verilen sinyalin yıldızlı dönüşümünü ve z dönüşümünü bulunuz. $f(t) = e^{-t}$

Not: örnekleyerek z- dönüşümünün doğrudan yazılabileceğine dikkat ediniz. Ancak yıldızlı dönüşüm alarak z- dönüşümüne geçiniz.

$$F(z) = F^*(s) \Big|_{e^{sT}=z} = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-T}} = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

Örnek: Zaman bölgesi ifadesi verilen sinyalin yıldızlı dönüşümünü ve z dönüşümünü bulunuz. $x(t) = t$

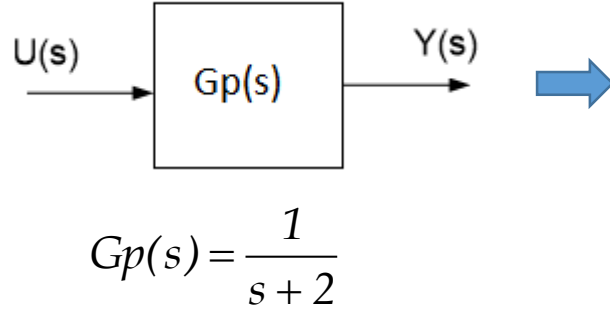
Not: örnekleyerek z- dönüşümü doğrudan yazılabilir ancak yıldızlı dönüşüm alarak z- dönüşümüne geçiniz.

$$G^*(s) = Te^{-Ts} \frac{1}{(1 - e^{-Ts})^2} \Rightarrow G(z) = T \frac{z}{(z - 1)^2}$$

Örnek: Zaman bölgesi ifadesi verilen sinyalin yıldızlı dönüşümünü ve z dönüşümünü bulunuz. $x(t) = \cos(\omega t)$

Not: örnekleyerek z- dönüşümünün doğrudan yazılabileceğine dikkat ediniz. Ancak yıldızlı dönüşüm olarak z- dönüşümüne geçiniz.

Örnek: Şekildeki gibi bir analog sistemini girişine ADC ve DAC bağlanırsa sistemin blok şeması nasıl çizilebilir ?



Bu durumda

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} G_p(s)\right] = G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{1}{s+2}\right] = Z\left[(1-e^{-sT}) \frac{1}{s(s+2)}\right]$$

Olur ve buradan $G(z)$ bulunursa bu yöntem **zoh** ile ayrıklaştırma yöntemi denir.

Dolayısıyla öncelikle Laplace bölgesinde verilen sürekli zaman bir fonksiyonun yıldızlı ve z- dönüşümünün bulunuşu bilinmelidir.

5.2 Laplace Bölgesinden Yıldızlı ve z- Dönüşümü

Yukarıda, zaman bölgesindeki ifadesi bilinen sürekli zaman bir sinyalin örneklenmişinin Laplace dönüşümü (yıldızlı dönüşümü) alınabilmekte ve yıldızlı dönüşümden de z dönüşümüne geçilebilmektedir.

Laplace dönüşümü verilen bir sürekli zaman sinyalin, yıldızlı dönüşümü rezidü teoremi kullanılarak aşağıdaki gibi alınabilir.

$$E^*(s) = \sum \left(\text{Rezidü } E(\lambda) \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right)$$

Burada, Rezidü katsayısı, basit kesirlere ayırma işlemindeki katsayılarla karşılık gelmektedir. λ ise fonksiyonun kutuplarıdır. Buna göre basit bir fonksiyonun yıldızlı ve z- dönüşümü,

$$E(s) = \frac{1}{s+2} \text{ ise } E^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T(s+2)}} \rightarrow E(z) = \frac{1}{1 - e^{-2T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-2T}}$$

Sonuç olarak, zaman bölgesinde veya Laplace bölgesinde verilen sürekli zaman bir sinyalin örneklenmişinin Laplace dönüşümü ve oradan z- dönüşümü, hem zaman bölgesinden hem de s- bölgesinden alınabilir.

Reel ve ayırık kök durumu

Örnek: Laplace dönüşümü verilen sinyalin yıldızlı dönüşümünü ve z dönüşümünü bulunuz. $E^*(s) = ?$ ve $E(z) = ?$

$$E(s) = \frac{1}{s(s-1)(s-2)}$$

$$E(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^T} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{2T}}$$

Reel ve katlı kök durumu

m katlı kökler için ve katlı kökler λ_i olmak üzere yıldızlı ve z -dönüşümü,

$$G^*(s) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right)_{\lambda=\lambda_i} \rightarrow G(z) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}e^{T\lambda}} \right)_{\lambda=\lambda_i}$$

Örnek: Laplace bölgesi ifadesi verilen fonksiyonun yıldızlı dönüşümünü ve z dönüşümünü bulunuz.

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$G^*(s) = \frac{e^{-Ts}T}{(1 - e^{-Ts})^2} \rightarrow G(z) = \frac{z^{-1}T}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

Karmaşık kök durumu

Karmaşık basit kesirlerine ayrılarak reel ayırık köklerdeki gibi elde edilebilir.

Örnek: Laplace bölgesi ifadesi verilen fonksiyonun yıldızlı dönüşümünü ve z dönüşümünü bulunuz.

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

Euler bağıntısı:

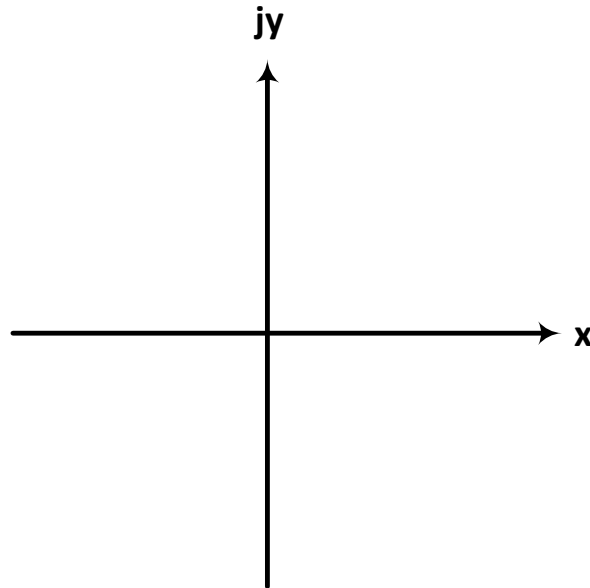
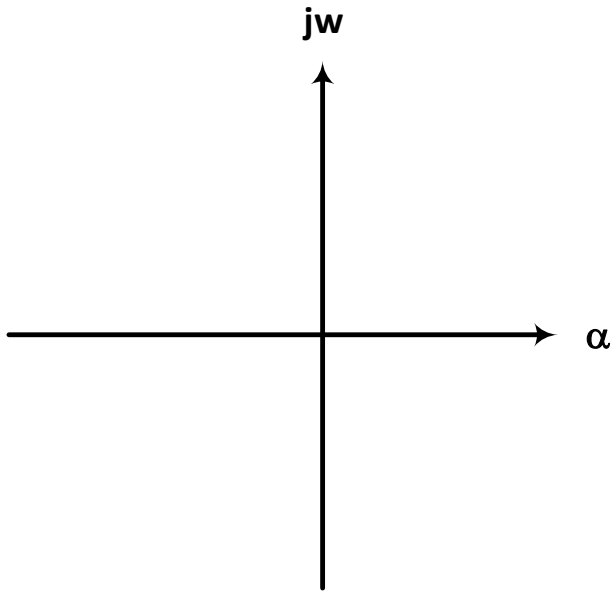
$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

$$e^{-jx} = \cos(x) - j\sin(x)$$

5.3 s ve z- Düzlemleri Arasındaki İlişki

s-düzleminde $s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ olarak verilen karmaşık bir noktanın z-düzlemindeki yeri,

$$z_{1,2} = e^{sT} = e^{(\alpha \pm j\omega)T}$$



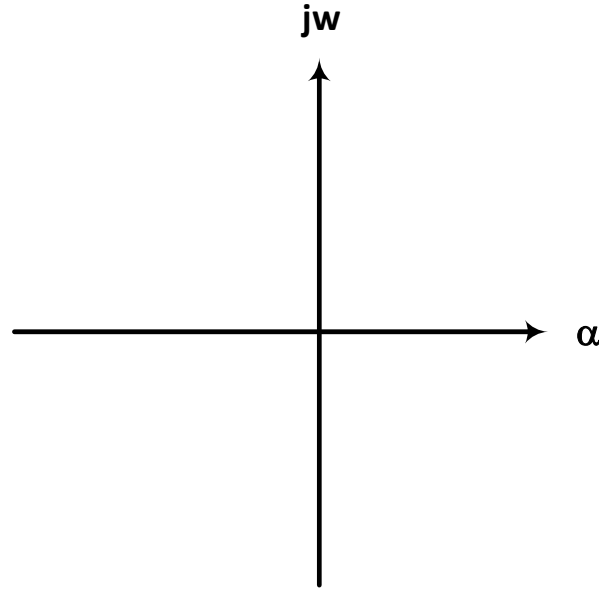
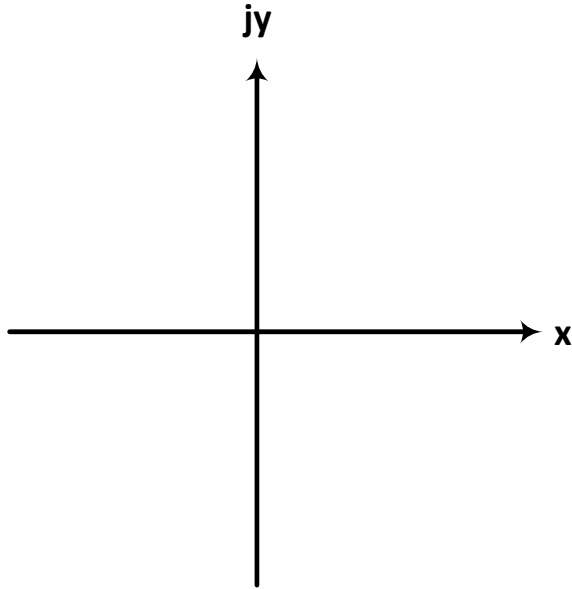
z-düzleminde

$$z = a \pm jb$$

olarak verilen karmaşık bir noktanın

s-düzlemindeki yeri,

$$z = r \angle \pm \theta$$



$$\alpha = \zeta w_n = \frac{\ln r}{T} ,$$

$$w = w_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{\theta}{T}$$

Sıfır-Kutup Eşleştirme Yöntemi (zpm)

$z = e^{sT}$ bağıntısından yararlanarak bir sistemin kutup ve sıfırları ayrı ayrı dönüştürülürse sıfır-kutup eşleştirme zpm yöntemi ile dönüşüm denir.

NOT: zpm yönteminde kalıcı durum kazançları da eşitlenmelidir vs. ancak burada ayrıntısına girilmeyecektir.

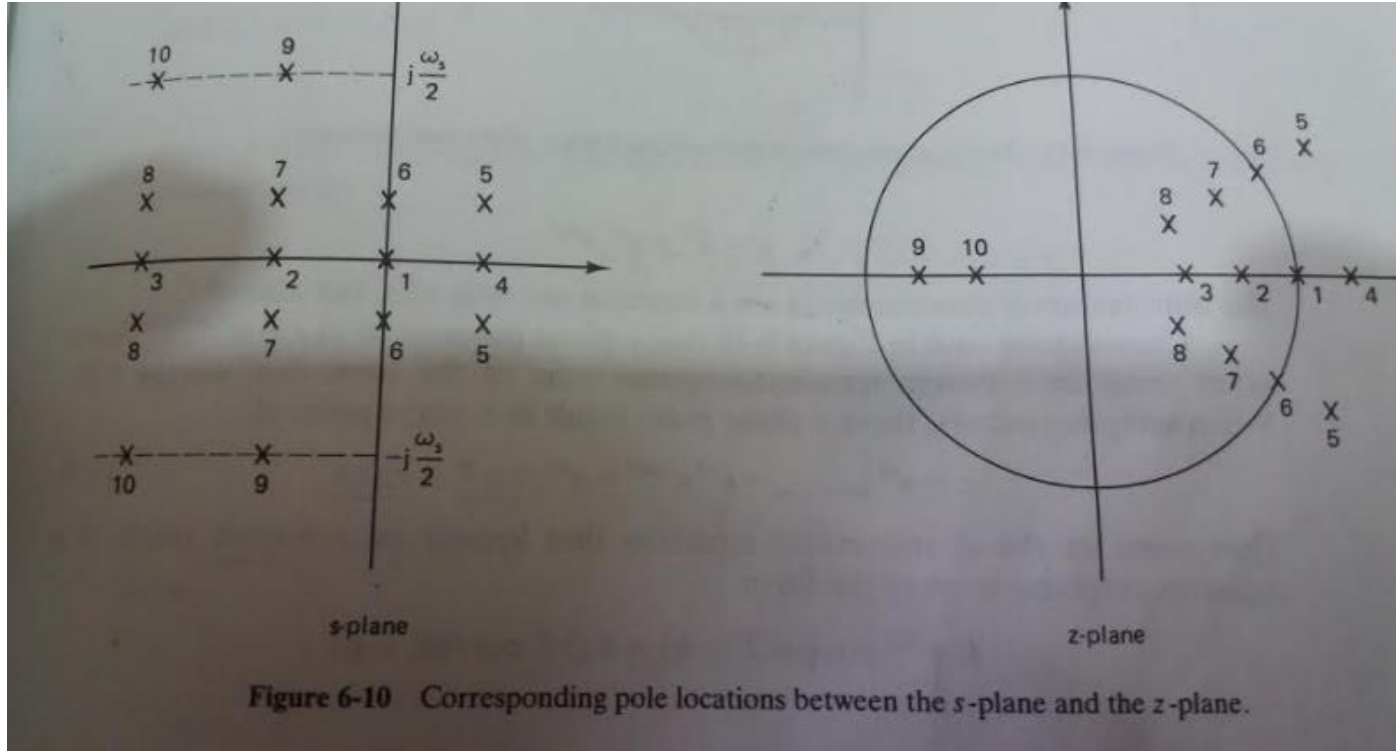
Örnek: Verilen analog transfer fonksiyonunu zpm ile analogdan sayısala dönüştürünüz, $G(z)=?$. $T=0.1$

$$G(s) = \frac{s + 1}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Örnek: Verilen sayısal transfer fonksiyonunu zpm ile sayısaldan analoğa dönüştürünüz, $G(s)=?$. $T=0.1$

$$G(z) = \frac{z - 0.2}{z^2 - 0.6z + 0.9}$$

Şekilde s-düzlemindeki çeşitli noktaların z-düzlemindeki karşılıkları verilmiştir. Buradan, s-düzlemindeki sanal eksenin **yani kritik kararlılık sınırının, z-düzleminde birim çembere** karşılık geldiği görülmektedir. Dolayısıyla z düzleminde birim çemberin içi **kararlılık** bölgesidir. S-düzleminde kutuplar sola doğru uzaklaştıkça bağıl kararlılık artarken z-düzleminde kutuplar merkeze (orjine) yaklaştıkça kararlılık artar.



Örnek: verilen sistemlerin ζ , w_n ve τ değerlerini karşılaştırınız.

Sayısal sistem, analog sistemin $T=1$ saniye ile örneklenmiş karşılığıdır.

Bu karşılığın bulunuşu ileride açıklanacaktır.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad ,$$

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

5.4 Açık çevrim ayırık zaman kontrol sistemleri

- Ayırık zaman kontrol sistemlerinin zaman bölgesi analizi, sürekli zaman sistemleri ayırık zamana dönüştürme yöntemleri (geri, ileri ya da merkezi fark yöntemi ile örnekleme-tutma yöntemi gibi) kullanılarak yapılabilir.
- ***Örnekleme-tutma yöntemi ile ayırıklaştırma yapılırken (örneklenmiş veri kontrol sistemleri de denir) önceki bölümde incelenen örnekleme ve tutma devrelerinin modellerine dikkat etmek gerekir.***
- Bu amaçla, yıldızlı dönüşüm alınırken dikkat edilmesi gereken bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$1-) (A^*)^* = A^*$$

$$2-) (A.B^*)^* = A^*.B^*$$

$$3-) (A.B)^* = \overline{AB}^* \neq A^*.B^*$$

$$4-) (A.B.C^*)^* = \overline{AB}^*.C^*$$

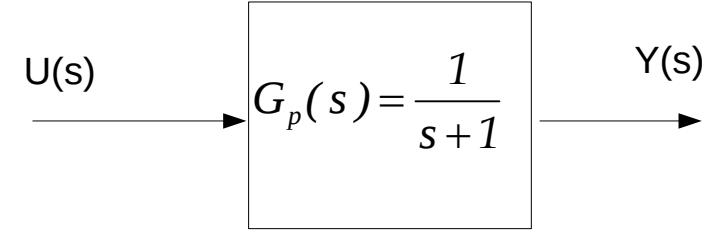
$$5-) (A.B^*.C^*)^* = A^*.B^*.C^*$$

Örnek: Şekilde verilen açık çevrim sürekli zaman sistemin,

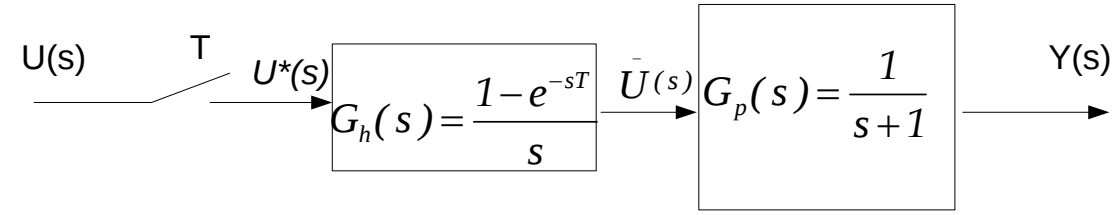
a-) Sürekli zamanda,

b-) İleri fark yöntemi ile ayrıklaştırarak,

$T=0.1$ s



c-) Örnekleme ve tutma yöntemi (zoh) ile ayrıklaştırarak, **birim basamak cevabını** bulunuz.

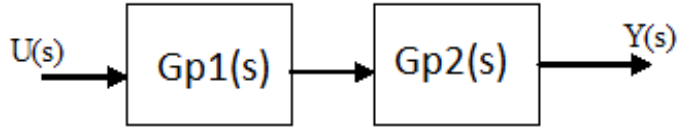


$$y(k) = 1 - e^{-kT}$$

Çeşitli Açık Çevrim Kontrol Sistemlerinin Analizi

Önceki örnekte bir analog sistemin örnekleme tutma yöntemi ile ayırıklaştırma şekli verilmiştir. Aşağıda, seri bağlı iki sistemin farklı örnekleme noktaları için ayırıklaştırma esasları incelenmiştir.

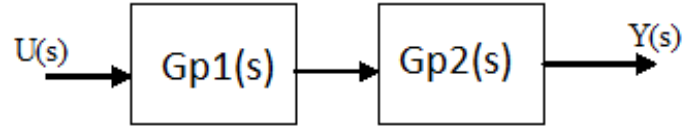
Örnek: Şekilde seri bağlı iki analog sistemin **her ikisi de girişlerinden örnekleme-tutma devreleri** ile ayırıklaştırılmıştır. **Varsa eşdeğer** $G_T(z)$ i bulunuz.



$$G_T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = G_1(z)G_2(z)$$

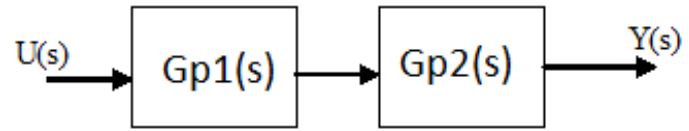
Örnek: Seri bağlı iki analog sistem sadece girişinden örneklenirse,

$$G_T(z) ?$$



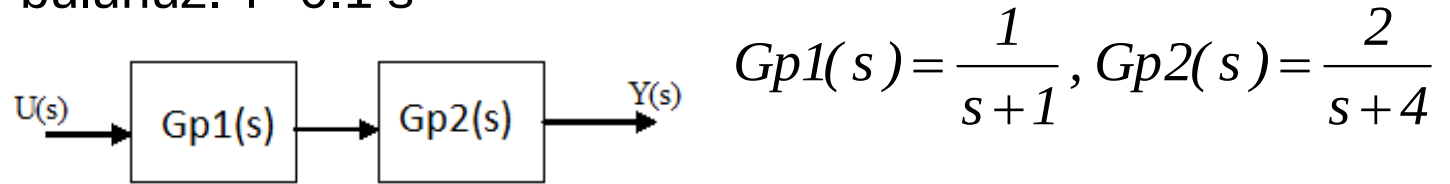
$$G_T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \overline{G_1 G_2}(z)$$

Örnek: Seri bağlı iki analog sistem ara sinyalden örneklenirse, $G_T(z)$?

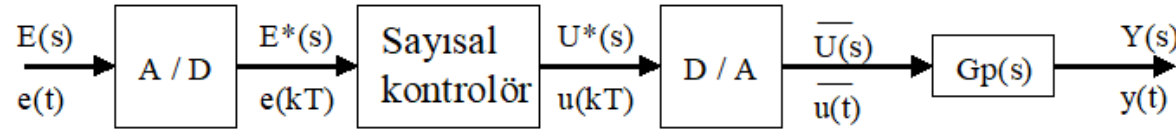


$$Y(z) = G_2(z) \cdot \overline{G_1} \overline{U}(z)$$

Örnek: Verilen analog sistemlerin sadece girişinden örneklendiğini ve tutulduğunu dikkate alarak ayırklaştırınız ve birim basamak cevabını bulunuz. $T=0.1$ s



Örnek Şekilde verilen açık çevrim sistemin birim basamak cevabını bulunuz. Denetleyicinin modeli aşağıdaki fark denklemi ile tanımlanmıştır.



$$G_p(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$u(k) = 2e(k) - e(k-1)$$

$$y(k) = -\frac{1-e^{-T}}{e^{-T}} \delta(k) + u(k) - \frac{(2e^{-T}-1)}{e^{-T}} e^{-kT}, k = 1, 2, 3, \dots$$

5.5 Kapalı Çevrim Örneklenmiş Verili Kontrol Sistemleri

Kurallar

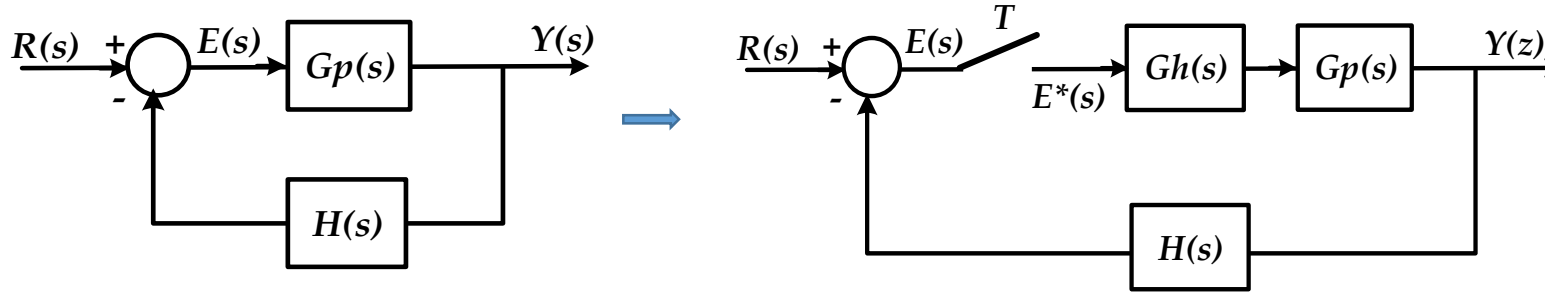
- Kapalı çevrim ayrık zaman kontrol sistemleri incelenirken bazı kurallara dikkat edilerek **varsa transfer fonksiyonları, transfer fonksiyonları yoksa çıkış ifadeleri** elde edilebilir.
- Aksi halde bu sistemlerin analizinde zorluklarla karşılaşılabilir.

1-) Her bir örnekleyicinin giriş ve çıkışına sinyal isimleri verilir. Örneğin giriş u ise çıkışı u^* olur.

2) Her bir örnekleyicinin girişi ve sistemin çıkışı örnekleyici **çıkışları ve sistem girişi cinsinden** yazılır.

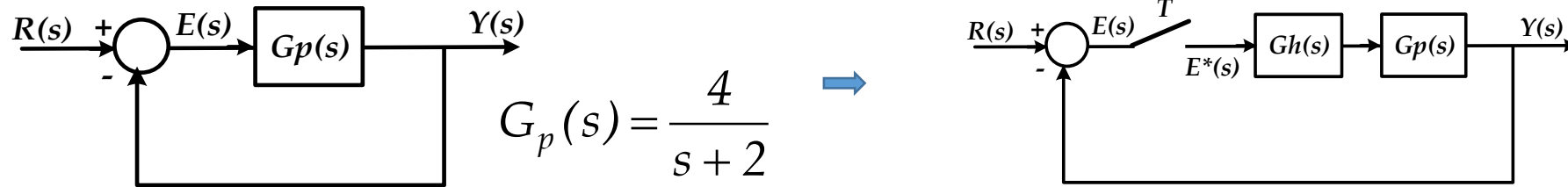
3-) Bu denklemlerden “*” lı dönüşümü alınarak transfer fonksiyonu ya da çıkış ifadesi elde edilebilir.

Örnek: Verilen kapalı çevrim kontrol sisteminde hata sinyali $E(s)$ örneklenmiştir (**örnekleme-tutma**). Varsa eşdeğer transfer fonksiyonunu yoksa çıkış ifadesini bulunuz.



$$T^*(s) = \frac{Y^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)} \Rightarrow T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + \overline{GH}(z)}$$

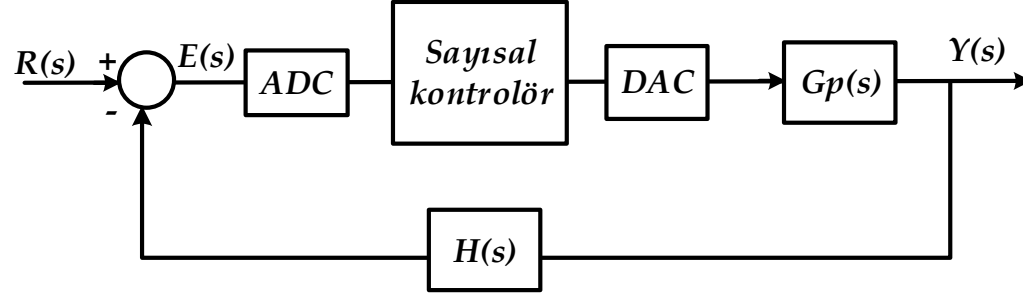
Örnek: Verilen kapalı çevrim sisteminde hata sinyali $E(s)$ örneklenmiştir (örnekleme-tutma). Birim basamak cevabını bulunuz ve **analog sistemin birim basamak cevabı ile karşılaştırınız**. $T=0.1$ s.



$$G(z) = \frac{0.36}{z - 0.82}$$

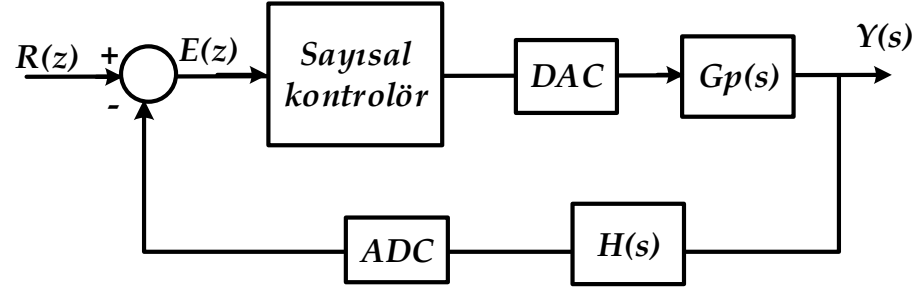
$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0.36}{z - 0.46} \quad \rightarrow \quad Y = T.R = \frac{0.36}{z - 0.46} \cdot \frac{z}{z - 1} \quad \rightarrow \quad y(k) = 0.667[1 - (0.46)^k]$$

Örnek: Verilen kapalı çevrim kontrol sistemini inceleyiniz.(Varsa kapalı çevrim transfer fonksiyonunu bulunuz.)

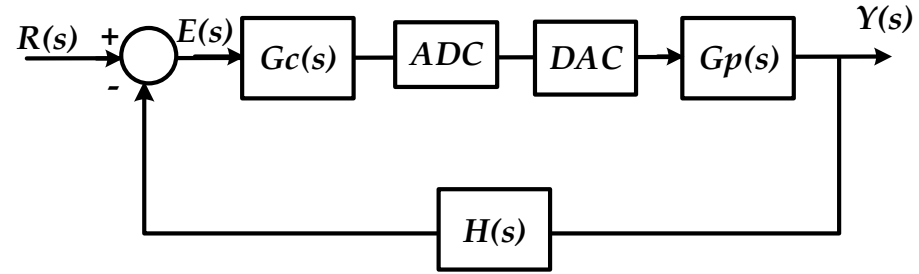


$$T^*(s) = \frac{Y^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)G_c^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)G_c^*(s)} \quad \Rightarrow \quad T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)G_c(z)}{1 + \overline{GH}(z)G_c(z)}$$

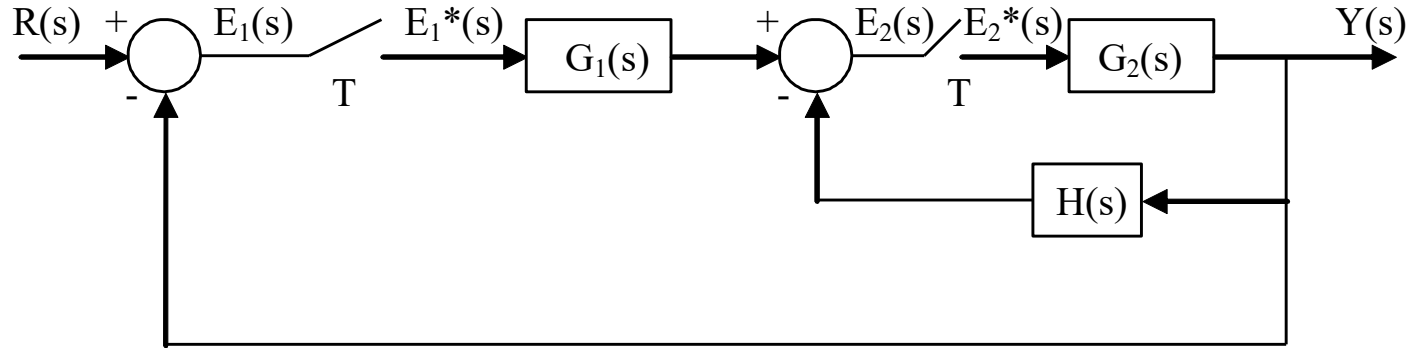
Örnek: Verilen kapalı çevrim kontrol sistemini inceleyiniz.(Varsa kapalı çevrim transfer fonksiyonunu bulunuz.)



Örnekler: Aşağıdaki kapalı çevrim kontrol sistemlerinin varsa transfer fonksiyonlarını yoksa çıkış ifadelerini bulunuz.



Örnek: Verilen kapalı çevrim kontrol sistemini inceleyiniz.(Varsa kapalı çevrim transfer fonksiyonunu bulunuz.)



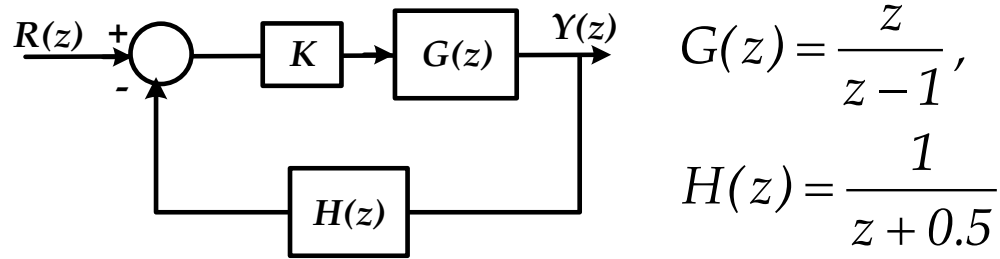
$$T^*(s) = \frac{Y^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G_1^*(s).G_2^*(s)}{1 + G_1^*(s).G_2^*(s) + \overline{G_2}H^*(s)} \quad \rightarrow \quad T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z).G_2(z)}{1 + G_1(z).G_2(z) + \overline{G_2}H(z)}$$

6.1 Ayırık Zaman Kontrol Sistemlerinin KYE

Ayrık zaman kontrol sistemlerin köklerin yer eğrisinin çiziminde, analog sistemlerdeki kurallar geçerlidir. **Bunlar tekrarlanırsa,**

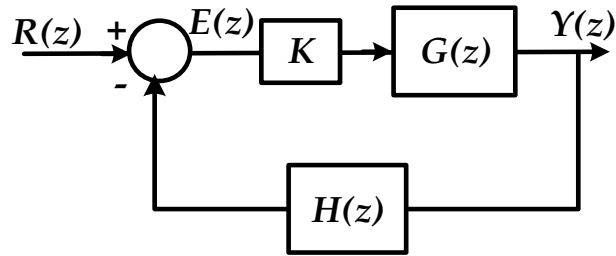
- Bilindiği gibi KYE, kontrol sisteminin AÇTF' undan yararlanarak çizilir. KYE, açık çevrim transfer fonksiyonundaki K kazancının değişimine göre kapalı çevrim kutuplarının değişimini gösteren eğrilerdir.

Örnek: Verilen sistemin KYE çiziniz.



Açı ve Genlik Koşulu

KYE çiziminde ve kontrolör tasarımı aç ve genlik koşulu son derece önemlidir.



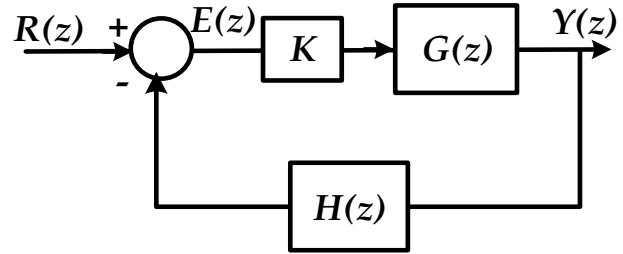
Açı Koşulu

$$\angle G(z)H(z) = \pm(2k + 1)\pi \quad K > 0 \text{ için}$$

Genlik Koşulu

$$K = \frac{1}{|G(z)H(z)|}$$

Örnek: $z=0.5+j0.5$ noktası, verilen sistemin KYE üzerinde midir? Üzerinde ise KYE' ni bu noktadan geçirecek olan K kazanç değeri nedir?



$$G(z) = \frac{z + 0.7}{z - 0.4}, \quad H(z) = \frac{1}{z - 1}$$

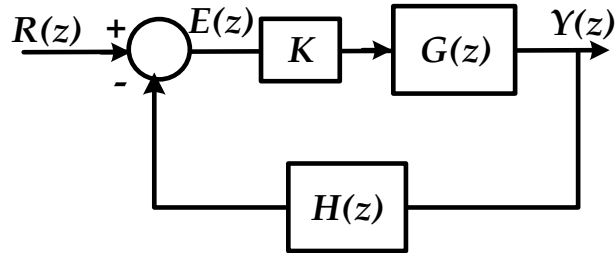
KYE Çizim kuralları

1-) Bir sistemin KYE' nin dal sayısı, AÇTF' nin kutuplarının sayısı kadardır ve KYE,

- $K=0$ için AÇTF' nin kutuplarında başlar, $K=\text{sonsuz}$ için sıfırlarında sona erer.

2-) $K>0$ için; seçilen s_x test noktasının sağ tarafında gerçekte eksen üzerinde tek sayıda kutup ve sıfır varsa o nokta KYE üzerindedir. Bu sonuç açı koşulu uygulanarak kolayca görülebilir.

Örnek: Verilen sistem için iki kuralı uygulayınız.

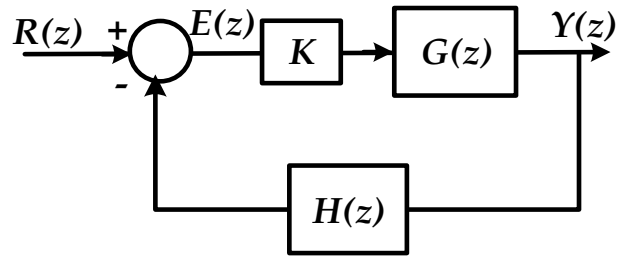


$$G(z) = \frac{z + 0.7}{z - 0.4}, \quad H(z) = \frac{1}{z - 1}$$

3-) Gerçek eksenden ayrılış ve gerçek eksene varış noktaları aşağıdaki denklemin kökleri arasındadır.

$$K = -\frac{1}{G(z)H(z)} \text{ ve } dK / dz = 0$$

Örnek: Verilen sistem için 3. kuralı uygulayınız.



$$G(z) = \frac{z + 0.7}{z - 0.4}, \quad H(z) = \frac{1}{z - 1}$$

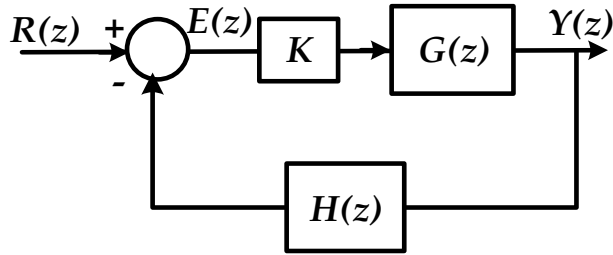
4-) KYE dallarının yaklaştığı asimptotlar varsa bu asimptotların açıları,

$$\beta = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m}$$

ve asimptotların
gerçek eksenini kestiği noktalar,

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(p_j) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(z_i)}{n-m}$$

Örnek: Verilen sistem için KYE çiziniz.

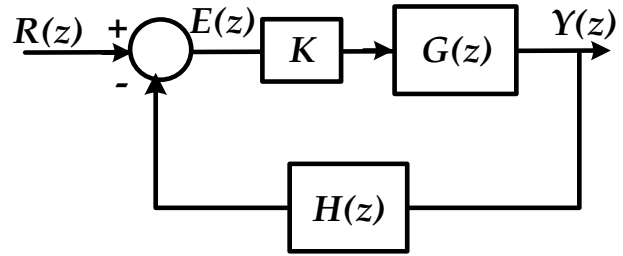


$$G(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.5}, \quad H(z) = \frac{1}{z + 0.8}$$

5-) KYE dallarının karmaşık kutuplardan ayrılış ve karmaşık sıfırlara varış açıları,

Açısı bulunacak kutba (ya da sıfıra) açi koşulu uygulanarak bulunur.

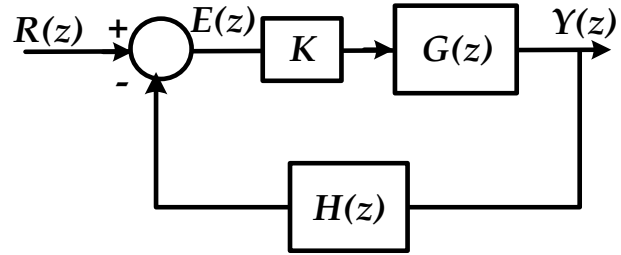
Örnek: Verilen sistem için KYE çiziniz.



$$G(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.5}, \quad H(z) = \frac{1}{z + 0.8}$$

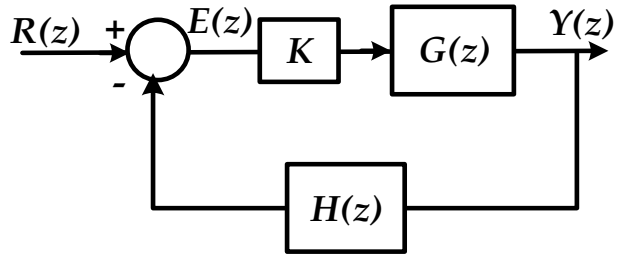
6-) *KYE' nin birim çemberi kesme noktaları Jury kriterinden bulunabilir. Jury kriterinin marjinal kararlılık koşulu uygulanır.*

Örnek: Verilen sistem için KYE çiziniz.



$$G(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.5}, \quad H(z) = \frac{1}{z + 0.8}$$

Örnek: Verilen kapalı çevrim kontrol sisteminin KYE çiziniz



$$1-) \quad KG(z)H(z) = \frac{K}{(z-1)(z+0.5)}$$

$$2-) \quad KG(z)H(z) = \frac{K(z^2 + 4)}{z^2 - 0.25}$$

6.2 Tasarım Yaklaşımları

Önceki bölümlerde sayısal kontrol sistemlerinin tasarımında aşağıdaki iki yaklaşımın izlenebileceği belirtilmiş ve **ilk yaklaşımla kontrolör tasarımı Bölüm 4' ün sonunda açıklanmıştı.**

1-) Analog bölgede analog olarak kontrolör tasarlanır ve sonra analog kontrolör ayırık zamana çevrilerek sayısal ortamda programlanır.

2-) **Doğrudan Ayırık Zamanda Kontrolör Tasarımı:** Kontrolör, ayırık zamanda tasarlanır. Yani kontrol edilecek sistem ve kontrol talepleri ayırık zamana dönüştürülür. Ayırık zaman kontrolörün parametreleri ayırık zamanda hesaplanır.

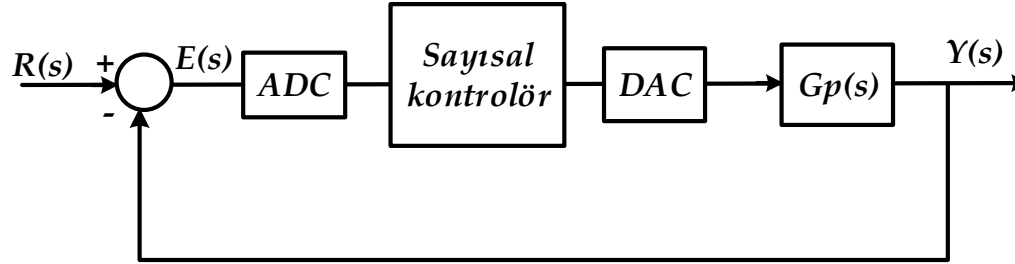
Burada ilk yaklaşım, Bölüm 4 de açıklandığından ikinci yaklaşımla tasarım açıklanacak ve ayrıca KYE ile tasarım örnekleri verilecektir.

Doğrudan Ayırık Zamanda Kontrolör Tasarımı

- Kontrol edilecek sistem ayrıklaştırılır. Uygun bir örnekleme periyodu seçilmelidir. Uygun örnekleme frekansı, sistemin sönümlü doğal frekansının 20 katından az olursa istenen performans elde edilemeyebilir. $w_s \geq 20w_n$
- Sisteme bağlanacak sayısal kontrolörün transfer fonksiyonu belirlenir.
- Ayırık zamandaki kontrol sisteminin karakteristik denklemi bulunur.
- Laplace bölgesinde verilen kontrol kriterleri (sönüm oranı-doğal frekans ya da yükselme süresi, yerleşme süresi, maksimum aşma gibi) z bölgesine dönüştürülür. Dolayısıyla referans sistemin karakteristik denklemi elde edilir.
- Kontrol kriterlerini karşılayacak şekilde kontrolör parametreleri hesaplanır. Burada, referans sisteme benzetilerek ya da KYE ile kontrolör parametreleri hesaplanabilir.
- Tasarlanan sayısal kontrolör programlanır.

Örnek: verilen sistem için doğrudan sayısal bölgede PI tasarlayınız.

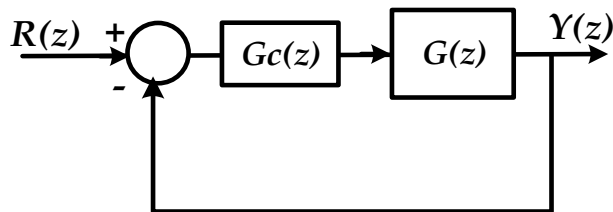
$$\omega_n = 10 \text{ rad / sn}, \quad \zeta = 0.8$$



$$G_p(s) = \frac{1}{s + 2}$$

1-) Önce sistem ayrıklaştırılarak z-bölgesindeki sayısal kontrol sistemi elde edilir. $T=?$

$T=0.1$ için $G(z) = \frac{0.09}{z - 0.8187}$



2-) Sisteme bağlanacak sayısal PI.

$$G_c(z) = \frac{K(z - a)}{z - 1}$$

3-) Sayısal kontrol sisteminin karakteristik denklemi:

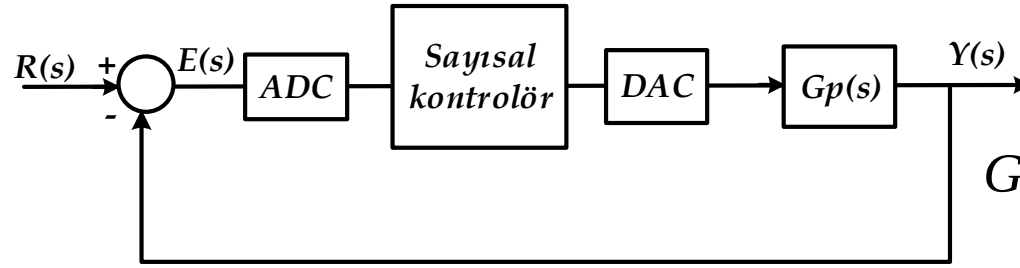
4-) Laplace bölgesinde verilen kontrol kriterleri (sönüm oranı-doğal frekans) z bölgesine dönüştürülür.

$$z^2 - 0.74z + 0.1994 = 0$$

5-) Karakteristik denklemler eşitlenirse,

$$G_c(z) = \frac{28(z - 0.2775)}{z - 1}$$

Örnek: verilen sistem için doğrudan sayısal bölgede PD tasarlayınız.



$$w_n = 10 \text{ rad} / \text{sn}, \quad \zeta = 0.8$$

$$G_p(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)}$$

T=0.1 için ↴

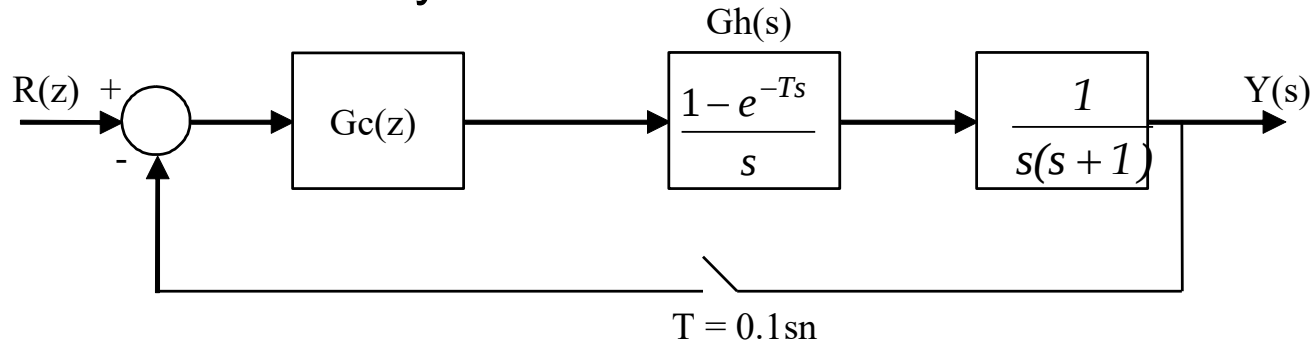
$$G(z) = \frac{0.0085z + 0.0072}{z^2 - 1.58z + 0.6}$$

6.3 Köklerin Yer Eğrisi (KYE) ile Sayısal Kontrolör Tasarımı

Kontrol sisteminin geçici rejim kriterlerini karşılamak amacıyla KYE ile kontrolör tasarlamak için aşağıdaki kurallar uygulanabilir.

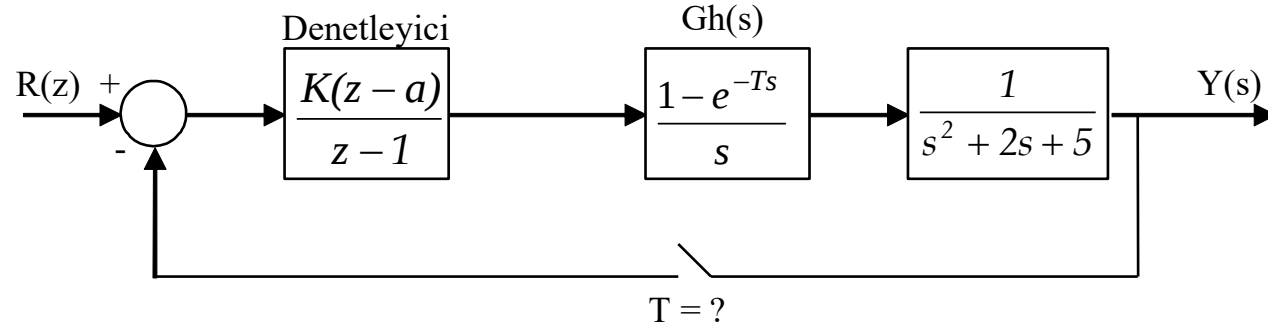
- 1-) Analog sistem ayrıklaştırılır.
- 2-) Ayrık zaman kontrolörün transfer fonksiyonu ile birlikte kontrol sisteminin AÇTF bulunur.
- 3-) Verilen kontrol isteklerinden (en büyük aşma, yükselme, yerleşme zamanı ya da sönüm katsayısı ve doğal frekans gibi) yararlanarak arzu edilen baskın kutupların z-düzlemindeki yeri belirlenir.
- 4-) Kontrolörlü sistemin KYE' nin, arzu edilen baskın kutuplardan geçmesi için açı koşulu kullanılarak denetleyicinin sisteme eklemesi gereken faz açısı belirlenir.
- 5-) Bu faz açısını karşılayacak şekilde kontrolör sıfırının değeri hesaplanır.
- 6-) Kontrollü sistemin KYE' nin arzu edilen baskın kutuplardan geçmesini sağlayacak şekilde genlik koşulundan yararlanarak kontrolör kazancı belirlenir.

Örnek: Verilen sistemde yerleşme süresini 0.5 saniyeden küçük ve maksimum aşmayı % 10 dan küçük yapacak şekilde KYE ile PD kontrolörü tasarlayınız.



$$G(z) = \frac{0.0048z + 0.0047}{z^2 - 1.9z + 0.9}$$

Örnek: Verilen sistemde sönüm oranı 0.8 ve sönümsüz doğal frekans 10 olacak şekilde KYE ile PI kontrolörü tasarlayınız. Uygun örnekleme frekansını seçiniz.



$T=0.1$ için

$$G(z) = \frac{0.0047z + 0.0044}{z^2 - 1.77z + 0.82}$$

