F.Ü.TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ ELEKTRİK VE ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
EET311 SİNYALLER VE SİSTEMLER DERSİ YAZ OKULU FİNAL SORULARI 06.09.2016

S.1.) Bozulmasız iletim için iletim ortamının H(s)'i hangi özellikleri taşımalıdır. Böyle bir iletim ortamı var mıdır? Açıklayınız.(8p)

S.2.) h(n) ve H(z) bakımından nedensellik, belleksizlik ve kararlılık tanımlarını yapınız. (7p)

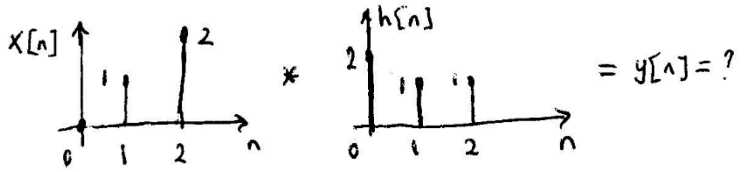
S.3.) Hem nedensel hem kararlı olan bir DZD sistemin H(z)'i hangi özellikleri taşır. (8p)

S.4.) u(n)'nin z dönüşümünü bulunuz. Bu sonucu ve z dönüşümünün özelliklerini kullanarak nu(n) 'in z-dönüşümünü bulunuz. Yakınsama bölgesinin nasıl değiştiğini açıklayınız.(12p)

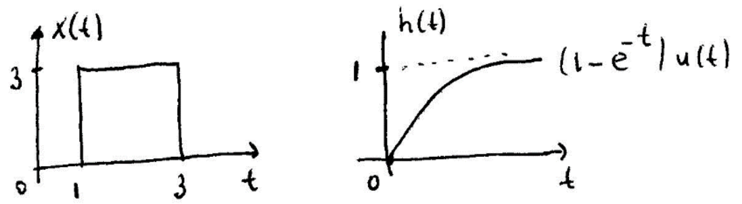
S.5.) Z dönüşümünde zamanda öteleme özelliğini yazınız ve ispatlayınız. Yakınsama bölgesinin nasıl değiştiğini açıklayınız. (10p)

S.6.) $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z|>|1|$ güç serisine açma yöntemiyle x[n]' i bulunuz.(10p)

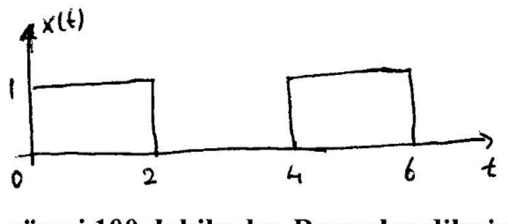
S.7.) y[n]=x[n] *h[n] bulunuz, çiziniz. (15p)



S.8.) y[t]=x[t] *h[t] bulunuz, çiziniz. (15p)



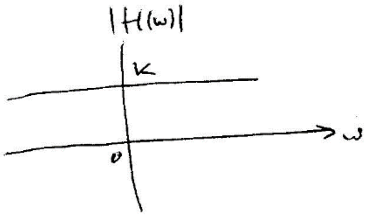
S.9.) Üstel biçimde Fourier serisi açılımını bulunuz. Sıfırdan farklı ilk üç harmoniği yazınız. İşaretin ortalama gücünü bulunuz. Birinci harmoniğin ortalama gücünü bulunuz (15p)



Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar dilerim. Melih Cevdet İnce

C.1.) Bozulmasız iletim için giriş singalinin şeklinin çıkışta tam olarak elde edilmesi gerekir. Genliği ve fazı farklı olabilir. Dolayısıyla bozulmasız iletim sağlayan bir iletim ortamının giriş-çıkış ilişkisi $y(t)$,

$$y(t) = K\, x(t - t_d)$$

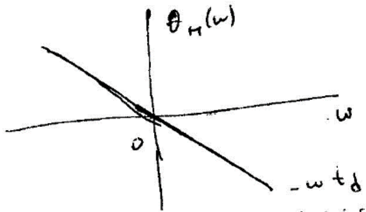


şeklindedir.

$$Y(s) = K e^{-s t_d} X(s)$$

$$Y(w) = K e^{-jw t_d} X(w)$$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = K e^{-jw t_d}$$



$$|H(w)| = K, \quad \theta_H(w) = -jw t_d$$

İletim ortamlarının hiçbirisi sonsuz frekans bandında sabit genlikli ve doğrusal fazlı faz cevaplı olamaz. Herbirinin eşdeğer devresinde R, L, C elemanları vardır. Bu nedenle ya alçak geçiren, ya yüksek geçiren yada başka türden bir süzgeç olarak ideal olmayan bir karakteristik gösterecektir.

C-2.) $n \neq 0$ için $h[n] \neq 0$ ise bellekli dir.
(veya $n = 0$ için $h[n] \neq 0$ ve $n \neq 0$ için $h[n] = 0$ ise belleksizdir)

$n < 0$ için $h[n] = 0$ ise nedenseldir.

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ ise kararlıdır.

$H(z)$'nin Y.B $|z| > r_{max}$ şeklinde sağ yanlıysa nedenseldir.

$H(z)$'nin Y.B $|z| = 1$ birim çemberi içeriyorsa kararlıdır.

Belleksiz sistemde $y[n] = k\delta[n]$ şeklindedir. Bunun z dönüşümünün YB bütün z düzlemidir.

C-3.) Hem nedensel hem kararlı ise Y.B $|z| > r_{max}$ ve $r_{max} < 1$ olmalıdır.

C-4.) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1$

$|z^{-1}| < 1$

$\frac{1}{|z|} < 1$

$|z| > 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1$

olduğunu biliyoruz.

$$n x[n] \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \qquad R' = R$$

$$n u[n] \longleftrightarrow -z \frac{(z-1) - z}{(z-1)^2} = -z \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad |z| > 1$$

Y.B değişmez çünkü kutbun yeri değişmedi

C.5.) $x[n-n_0] \longleftrightarrow \underline{\underline{z^{-n_0} X(z)}}$ $\quad R' \supset R \cap \{0 < |z| < \infty\}$

Tanım bağıntısından

$$\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]\, z^{-n}$$

$m = n - n_0$ değişken dönüşümü ile

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m} = \underline{\underline{z^{-n_0} X(z)}}$$

$n_0 > 0$ ise z^{-n_0}, $\left\{\left(\frac{1}{z^{n_0}}\right)\right\}$ ile çarpmadan dolayı $z=0$ da X lar ortaya çıkar. Bu. kutuplar
varsa önceki $X(z)$'in ∞ daki $\emptyset$ ları ile yok edilir.
Yoksa yeni dönüşümün artık $z=0$ da X vardır. Böylece Y.B bu kutbun dışında
bırakacak şekilde daralır.

$n_0 < 0$ ise z^{-n_0}, yani z^{n_0} ile çarpmadan dolayı $z=0$ da bir $\emptyset$ ortaya çıkar.
Bu eklenen sıfır, varsa $z=0$ daki X ile sadeleşir. Böylece Y.B artık $z=0$ da X yoktur
yeni Y.B $z=0$ daki X ortadan kalktığı için $z=0$'ı da içine alacak şekilde genişler.

C.6.) $X(z) = \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}$, $|z| > |a|$ Y.B bir çemberin dış bölgesi yani Y.B sağ yanlı.

Dolayısıyla z^{-1}'in pozitif kuvvetleri cinsinden bir dizi elde etmek için bölme yapmak zorundayız.
uygun uzun bölme $1 - a z^{-1}$'i 1'e bölmektir.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots \\
\hline
1 - a z^{-1} & 1 \\
 & \underline{-\;1 - a z^{-1}} \\
 & a z^{-1} \\
 & \underline{-\;a z^{-1} - a^2 z^{-2}} \\
 & a^2 z^{-2} \\
 & \underline{-\;a^2 z^{-2} - a^3 z^{-3}} \\
 & a^3 z^{-3}
\end{array}
$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots + a^k z^{-k} + \dots$$

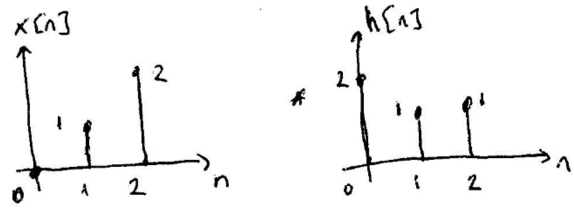
Tanım bağıntısı $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ old. göre

$x[n] = 0 \quad n < 0$

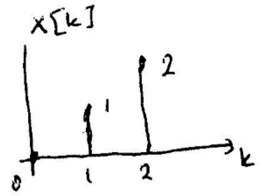
$x[0] = 1$, $x[1] = a$, $x[2] = a^2$, $\dots$, $x[k] = a^k$

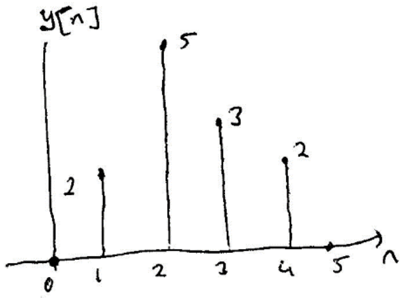
O halde $\underline{\underline{x[n] = a^n u[n]}}$

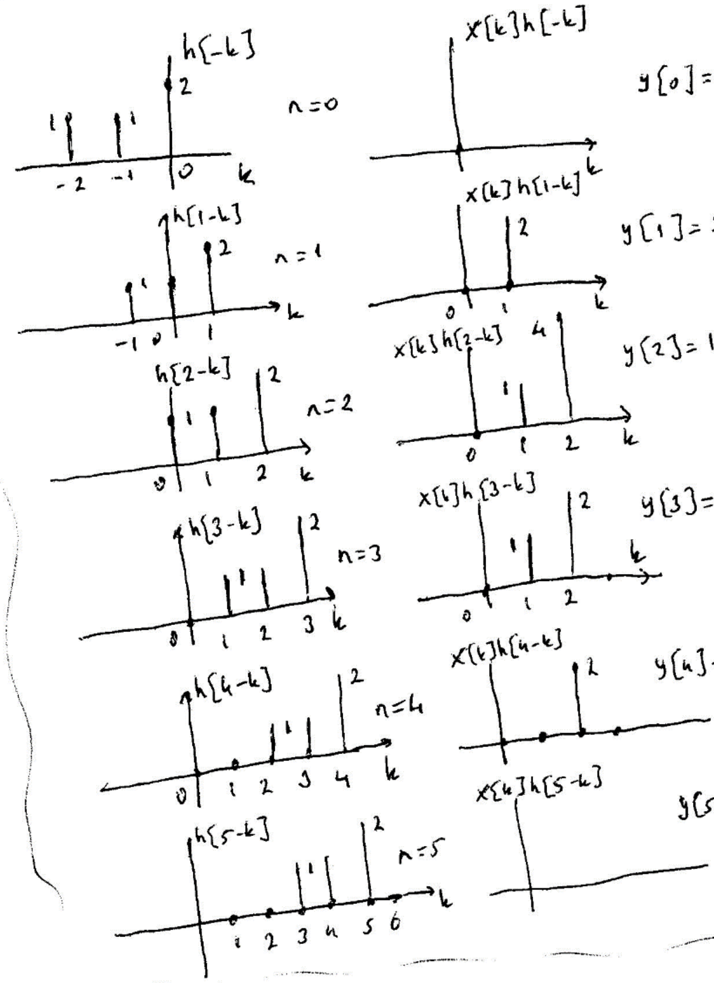
C.7.)



$$* \quad = y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$







$y[0] = 0$

$y[1] = 2$

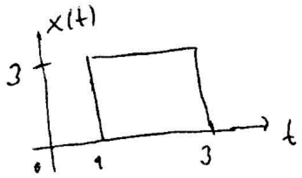
$y[2] = 1+4 = 5$

$y[3] = 1+2 = 3$

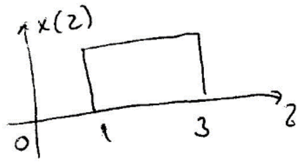
$y[4] = 2$

$y[5] = 0$

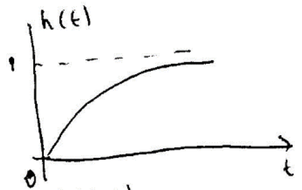
C.8.)



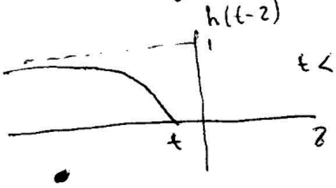
$$x(t) = \begin{cases} 3 & 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$



$$x(\tau) = \begin{cases} 3 & 1 \leq \tau \leq 3 \\ 0 & \text{d.y} \end{cases}$$

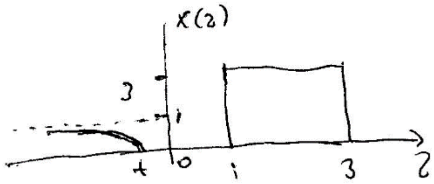


$$h(t) = \begin{cases} (1-e^{-t}) & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

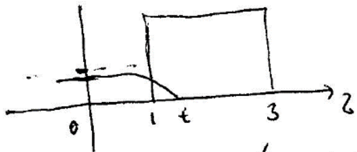


$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1-e^{-(t-\tau)} & (t-\tau) \geq 0 \;,\; -\tau \geq -t \;,\; \tau \leq t \\ 0 & \tau \leq 0 \end{cases}$$

C.8 devam



$t \leq 1 \Rightarrow y(t) = 0$ ①



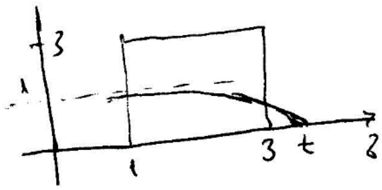
$1 \leq t \leq 3 \Rightarrow y(t) = \int_1^t x(z)h(t-z)dz = \int_1^t 3 \cdot (1 - e^{-(t-z)})\, dz$

$y(t) = \int_1^t 3dz - \int_1^t 3 e^{-t} e^{z} dz = 3\int_1^t dz - 3e^{-t}\int_1^t e^{z} dz = 3[z]_1^t - 3e^{-t}[e^{z}]_1^t$

$y(t) = 3[t-1] - 3e^{-t}[e^{t} - e^{1}] = 3t - 3 - 3e^{-t}e^{t} + 3e^{-t}e^{1} = 3t - 6 + 3e^{1-t}$ ② $1 \leq t \leq 3$

$t = 1 \Rightarrow y(t) = 3 \cdot 1 - 6 + 3e^{0} = 0$ ✓

$t = 3 \Rightarrow y(t) = 3 \cdot 3 - 6 + 3e^{-2} = 3 + \frac{3}{e^2} = 3,406$ ✓



$t \geq 3 \Rightarrow y(t) = 3[z]_1^3 - 3e^{-t}[e^{z}]_1^3$

$y(t) = 3[3-1] - 3e^{-t}[e^{3} - e^{1}]$

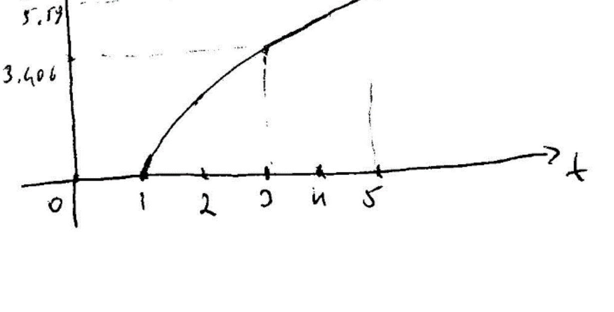
$y(t) = 3 \cdot 2 - 3e^{-t+3} + 3e^{-t+1}$

$y(t) = 6 - 3e^{3}\frac{1}{e^t} + 3e^{1}\frac{1}{e^t}$ ③

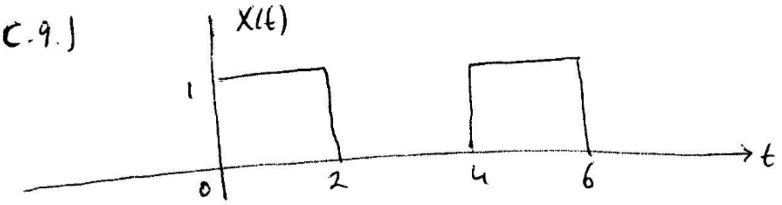
$t = 3 \Rightarrow y(t) = 6 - 3 + 3e^{-2} = 3,406$ ✓

$t = 5 \Rightarrow y(t) = 6 - 3e^{-2} + 3e^{-4} \cong 5,59$

$t \to \infty \Rightarrow y(t) = 6$



C.9.)



$$x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & 2<t<4\end{cases}$$

$$w_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$C_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jkw_0t}dt$, $k=0$ için ortalama değer $C_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^2 dt$

$$C_0=\frac{1}{T}\left[t\right]_0^2=\frac{2}{T}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ //$$

$$C_k=\frac{1}{T}\int_0^2 e^{-jkw_0t}dt=\frac{-1}{Tjkw_0}e^{-jkw_0t}\Big|_0^2=\frac{-1}{Tjkw_0}\left(e^{-jkw_0 2}-e^0\right)$$

$$C_k=\frac{-1}{Tjk\frac{\pi}{2}}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 2}-1\right)=\frac{1}{4jk\frac{\pi}{2}}\left(1-e^{-jk\pi}\right)$$

$$C_k=\frac{1}{2jk\pi}\left(1-e^{-jk\pi}\right)$$

$$e^{jk\pi}=\cos k\pi-j\cancelto{0}{\sin k\pi}=\cos k\pi=(-1)^k \quad k\neq0$$

$$=(-1)^k=\begin{cases}1 & k \text{ çift ise}\\ -1 & k \text{ tek ise}\end{cases}$$

k çift ise $C_k=0$

$$C_1=\frac{1}{2j\pi}(1+1)=\frac{1}{j\pi}$$

$$C_{-1}=\frac{-1}{2j\pi}(1+1)=-\frac{1}{j\pi}$$

$$C_3=\frac{1}{2j3\pi}\,2=\frac{1}{3j\pi}\ ,\quad C_{-3}=-\frac{1}{j3\pi}$$

$$C_5=\frac{1}{2j5\pi}\,2=\frac{1}{j5\pi}\ ,\quad C_{-5}=-\frac{1}{j5\pi}$$

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$
$$-\ e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta$$
$$\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}=\sin\theta$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jkw_0t}=\dots-\frac{1}{j5\pi}e^{-j5w_0t}+\frac{1}{j5\pi}e^{j5w_0t}-\frac{1}{j3\pi}e^{-j3w_0t}+\frac{1}{j3\pi}e^{j3w_0t}-\frac{1}{j\pi}e^{-jw_0t}+\frac{1}{j\pi}e^{jw_0t}+\frac{1}{2}$$

$$X(t)=\dots\frac{2}{5\pi}\sin 5w_0t+\frac{2}{3\pi}\sin 3w_0t+\frac{2}{\pi}\sin w_0t+\frac{1}{2}$$

İşaretin ortalama gücü $\frac{1}{T}\int_T|x(t)|^2dt=\frac{1}{4}\int_0^2 1^2dt=\frac{1}{4}\,t\Big|_0^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ //

1. harmoniğin ortalama gücü $=\sum_{k=-1}^{1}|C_k|^2$, $k\neq0$

$$=|C_{-1}|^2+|C_1|^2=\left|-\frac{1}{j\pi}\right|^2+\left|\frac{1}{j\pi}\right|^2=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}=\frac{2}{\pi^2}=\frac{2}{9{,}86}=0{,}202$$