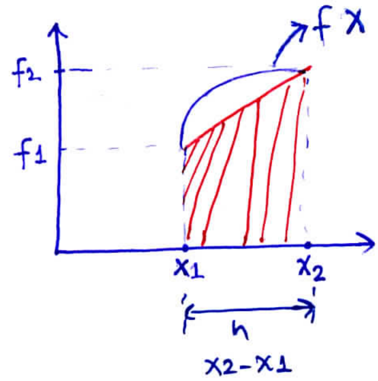
Sayısal integral

$$\boxed{I = \int_a^b f(x).dx}$$

I ; [a,b] aralığında f(x) eğrisi ile x ekseni arasında kalan yüzeyin alanıdır.

* f(x) fonksiyonunun integralinin alınmasının zor veya alınamıyorsa ya da fonksiyon bilinmiyorsa sadece noktalar mevcut ise sayısal analiz yöntemleri belirli integralin bulunması için kullanılabilir.

1-) Yamuk (trapezoidal) Yöntemi



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x).dx = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.h$$

* Her iki noktadan birinci derece bir polinom geçirerek, altındaki alanın hesaplanması ilkesine dayanır.

n tane nokta için

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_n} f(x).dx = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + 2.\sum_{i=2}^{i=n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]}$$

n=5 nokta olsun:

$$\int_{x_1}^{x_5} f(x).dx = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + 2.\left(f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right) + f(x_5)\right]$$

1.yol

```
function I = yamuk (x,y)

  n=length(x);
  h= x(2) - x(1);
  I = 0;

 for  i=1:n
 if  i==1 || i==n

    Toplam = y(i)

 else
      Toplam = 2*y(i)
 end
     I = I + Toplam
end
  I = (h/2) * I
```

2.yol

```
function I = trapezoidal(x,y)

  n=length(x);
  h=x(2) - x(1);
  I(1) =y(1);
  I(n) =y(n);
  I([2:n-1])= 2 * y([2:n-1]);
  I =(h/2)* sum(I)
```

programı yamuk/trapezoidal ismiyle kaydedip command window da;

```
>> x = [1   1.25   1.5   1.75   2]
>> y = [6   7.0625   8.25   9.5625   11]
>> yamuk/trapezoidal (x,y)      % y=f(x)
   h=0.25
  ans = 8.3438
```

2-) Simpson Yöntemi

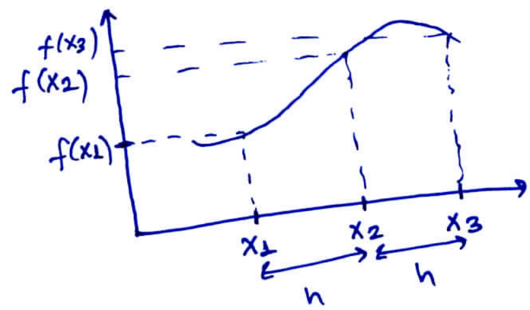
2 farklı versiyonu vardır.

2.1-) 1/3 Simpson Kuralı (1. Simpson yöntemi)

Her 3 noktadan 2. dereceden bir polinom geçirilerek altındaki alanın yaklaşık olarak hesaplanması ilkesine dayanır.

* 2. dereceden yaklaşımla yapıldığından en az 3 noktaya ihtiyaç vardır.

* 2. dereceden bir yaklaşım olduğundan dilim sayısı 2'nin katı olmalı.



Nokta sayısı = 2K + 1

Dilim sayısı = nokta sayısı − 1

Dilim sayısı = 2K

* Yöntemin uygulanması için dilim sayısı 2'nin katı olmalıdır. Aksi takdirde bu yöntem uygulanamaz. { programı yazarken mutlaka bunu düşün }

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_1) + 4\cdot\sum_{\substack{i=2\\ \text{çift}}}^{n-1} f(x_i) + 2\cdot\sum_{\substack{i=3\\ \text{tek}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]}$$

1. ve sonuncu değerleri aynen
çift değerleri 4
tek değerleri 2 ile çarp

```
function I = simpson13(x,y)
 n=length(x);
 h= x(2) -x(1);
I(1) =y(1);
I(n) =y(n);
dilim =n - 1;
if  mod(dilim,2) ==1
  disp(' Bu yontem uygulanamaz')
   I =' bulunamadi';
  return
  end
for j=2:n-1
 if mod(j,2) ==1
  I(j)= 2 * y(j)
else
   I(j) = 4*y(j)
end
end
 I = h/3 * sum(I)
```

Bu yöntemin (simpson 1/3) uygulanabilmesi iç
dilim sayısı (nokta sayısının bireksiği)
2'nin katı olmalıdır.

function sonlandı.

```
>> x=[1 1.25 1.5 1.75 2]
>> y=[6 7.0625 8.25 9.5625 11]
>> simpson 13 (x,y)

ans =
      8.3333
```

2.2-) 3/8 Simpson Kuralı (2. simpson yöntemi)

Her 4 noktadan 3. dereceden bir polinom geçirilerek altındaki alanın yaklaşık olarak hesaplanması ilkesine dayanır.

* 3. dereceden yaklaşımla yapıldığından en az 4 noktaya ihtiyaç vardır.
* 3. dereceden yaklaşım olduğundan dilim sayısı 3'ün katı olmalıdır.

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)\cdot dx \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_1)+3.f(x_2)+3.f(x_3)+2.f(x_4)+3f(x_5)+3f(x_6)+2f(x_7)+\dots+2f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Katsayısı 1. ve n. olanlar aynen

x_{3k+1} olanları → 2 ile çarp

diğerlerini → 3 ile çarp

x_1

$x_2 \rightarrow 3$

$x_3 \rightarrow 3$

$x_4 \rightarrow x_{3k+1} \rightarrow 2$

$x_5 \rightarrow 3.$

$3k+1$

1 → 4.

2 → 7.

3 → 10.

↓

2 ile çarp.

```
function I = simpson38(x,y)
 n=length(x);
 h=x(2) - x(1);
 I(1) =y(1);
 I(n) =y(n);
 dilim = n-1;
 if  mod(dilim, 3) ~=0        --> 3'ün katı değilse   } yöntemin uygulanıp
   disp(' Bu yöntem uygulanamaz')                     } uygulanmadığı denetleniyor.
   I('Bulunamadı')
  return
  end
 for j=2:n-1
  if mod(j-1, 3)==0          --> 3k+1 olup olmadığı denetlendi
     I(j)= 2* y(j)
 else
      I(j) =3*y(j)
 end
end
 I = (3*h/8)* sum(I)
```

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun $[1\ 2]$ aralığındaki integralinin değeri ?

$$\int_1^2 f(x).dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]\Bigg|_1^2$$

$$= \left[\frac{2^3}{3} + \frac{2.2^2}{2} + 6\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{2} + 3\right]$$

$$= \left[\frac{8}{3} + 4 + 6\right] - \left[\frac{1}{3} + 4\right]$$

$$= 8.33$$

Yamuk yöntemi

ÖR 7

$x \rightarrow$	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x) \rightarrow$	6	7.0625	8.25	9.5625	11

$$\int_1^2 f(x).dx = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + 2\{f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\} + f(x_5)\right]$$

$$\int_1^2 f(x).dx = \frac{0.25}{2}\left[6 + 2.[7.0625 + 8.25 + 9.5625] + 11\right]$$

$$= 8.3438$$

$h = 1.25 - 1 = 0.25$

3/8 Simpson Kuralı

Yukarıdaki örneği 3/8 simpson kuralı ile hesaplayın.

Dilim sayısı = nokta sayısı $- 1 = 5 - 1 = 4$
$\downarrow$
3'ün katı olmadığından bu yöntem uygulanamaz.

ÖR/Ç

Aynı örneği 1/3 simpson ile çözelim:

X →	1	1.25	1.5	1.75	2
f(x) →	6	7.0625	8.25	9.5625	11

Dilim sayısı = 5-1 = 4 ↓ 2'nin katı olduğundan uygulanabilir.

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_n} f(x).dx \cong \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_1)+4\underset{\text{çift}}{\sum_{i=2}^{n-1}} f(x_i) + 2\underset{\text{tek}}{\sum_{i=3}^{n-2}} f(x_i) + f(x_n)\right]}$$

$$\int_1^2 f(x).dx \cong \frac{0.25}{3}\cdot\left[6+4.(7.0625+9.5625)+2.(8.25)+11\right]$$

$$\cong 8.333$$

ÖR/Ç

X	1	1.1667	1.3333	1.5	1.6667	1.8333	2
f(x)	6	6.6944	7.4444	8.25	9.11	10.0278	11

$\int_1^2 f(x).dx = ?$ Verilen integrali 3/8 Simpson kuralı ile hesaplayınız.

Dilim sayısı = 7-1 = 6 (3'ün katı old. 3/8 simpson kuralı uygulanabilir)

$$\int_1^2 f(x).dx \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_1)+\underline{\underline{3}}.[f(x_2)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_6)]+2.f(x_4)+f(x_7)\right]$$

(3k+1)

$$= \frac{3.(0.1667)}{8}\left[6+3.[6.6944+7.4444+9.11+10.0278]+2(8.25)+11\right]$$

$$\int_1^2 f(x).dx \cong 8,333$$

ÖR:

x	-1	-0.5	0	0.5	1
f(x)	-1	-0.5	0	1	2

Tabloda verilen noktaları kullanarak $\int_{-1}^{1} f(x).dx$ integralinin sayısal değerini;

a-) yamuk yöntemini

b-) Simpson (1/3 ve 3/8) yöntemlerini kullanarak elde ediniz.

a-) $$\int_{-1}^{1} f(x).dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_1)+2.(f(x_2)+f(x_3)+f(x_4))+f(x_5)\right]$$

$$= \frac{0.5}{2}\left[-1+2.(-0.5+0+1)+2\right] = 0.5$$

b-) Simpson 3/8 yöntemi nokta sayısı uygun olmadığından uygulanamaz.

Simpson 1/3

$$\int_{x_1}^{x_5} f(x).dx \cong \frac{h}{3}.\left[f(x_1)+\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Ç}}}{4}.f(x_2)+\underset{\substack{\downarrow \\ \text{T}}}{2}.f(x_3)+\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Ç}}}{4}.f(x_4)+f(x_5)\right]$$

$$\int_{-1}^{1} f(x).dx \cong \frac{0.5}{3}.\left[-1+4.(-0.5)+2.0+4.1+2\right] = 0.5$$